INSTITUTO SUPERIOR "ZARELA MOYANO DE TOLEDO"
PROF. ING. ELSA MEDINA

CURSO UNICO DE INGRESO 2010

MATEMATICAS

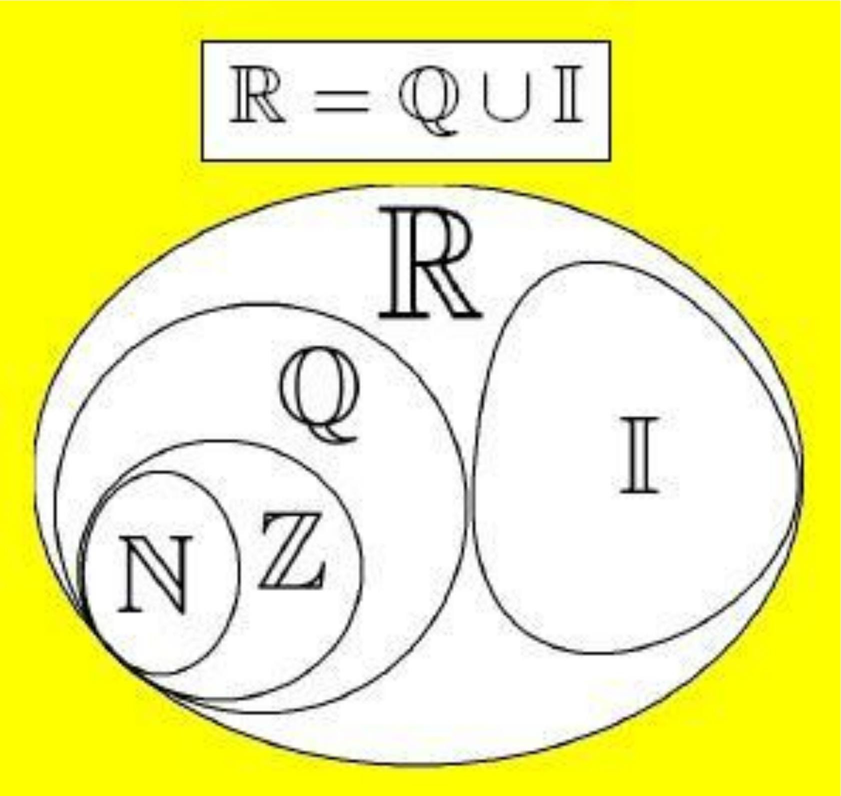
INTRODUCCION

"El presente material supone un **REPASO** sobre los temas fundamentales y necesarios para poder abordar las distintas materias de la carrera que Ud. ha elegido y que tienen como herramienta a la Matemática, a la vez que propone una **nivelación** de esta disciplina de todos los aspirantes…"

CONTENIDOS TEMATICOS

- CONJUNTOS NUMERICOS
- NUMEROS NATURALES
- NUMEROS ENTEROS
- NUMEROS RACIONALES
- NUMEROS IRRACIONALES
- NUMEROS REALES

CONJUNTOS NUMERICOS



R: Números Reales

Q: Números Racionales

I: Números Irracionales (Q*)

Z: Números Enteros.

N: Números Naturales

Números Naturales

Número natural, el que sirve para designar la cantidad de elementos que tiene un cierto conjunto, y se llama cardinal de dicho conjunto.
Los números naturales son infinitos. El conjunto de todos ellos se designa por N:
N = {0, 1, 2, 3, 4,…, 10, 11, 12,…}

El cero, a veces, se excluye del conjunto de los números naturales.
Además de cardinales (para contar), los números naturales son ordinales, pues sirven para ordenar los elementos de un conjunto:
1° (primero), 2° (segundo),…, 16° (decimosexto),…

Números Naturales - Operaciones

OPERACION	NOTACION SIMBOLICA	ELEMENTOS
Adición	$a + b = c$	a y b se denominan sumandos; c es el resultado
Resta	$a - b = c$ $(a \geq b)$	Debe ser a mayor o igual que b. a se denomina minuendo y b sustraendo c es el resultado
Multiplicación	$a \cdot b = c$	a y b son los factores; c es el producto

Números Naturales - Operaciones

División	$a : b = c$ $(b \neq 0)$	Para poder realizarla, debe ser a múltiplo de b, y $b \neq 0$ a se denomina dividendo y b divisor; c es el cociente.
Potenciación	$a^n = b$ Además $a^1 = a$ $a^0 = 1$ $0^n = 0$	a y n no deben ser simultaneamente nulos, a se denomina la base y n el exponente; b es la potencia
Radicación	$\sqrt[n]{a} = b$ (si $b^n = a$)	a se llama radicando y b la raíz; n se denomina índice.

Números Naturales - Propiedades

PROPIEDADES DE LOS NUMEROS NATURALES

Conmutativa	$a + b = b + a$ $a \, . \, b = b \, . \, a$	Distributiva	$(a \pm b) \, . \, c = a \, . \, c \pm b \, . \, c$ $(a \pm b) : c = a : c \pm b : c$ $(a \, . \, b)^n = a^n \, . \, b^n$ $(a : b)^n = a^n : b^n$ $\sqrt[n]{a \, . \, b} = \sqrt[n]{a} \, . \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \, . \, b) \, . \, c = a \, . \, (b \, . \, c)$		

Existencia del elemento neutro, (Elemento que deja invariable al número al operar con el)	$a + 0 = a$ $a \, . \, 1 = a$	Para la suma es el cero Para la multiplicación es el uno
Clausura	$a * b = c \; / \; c \subset \mathbb{N}$	La operación entre dos números naturales da otro número natural

La simbología se lee: "La operación entre dos números naturales a y b es igual a c tal que c pertenece al conjunto $\mathbb{N}$ "

Uniforme — La operación entre dos números naturales tiene resultado único

Números Naturales - Ejercicios

1) Realizar las operaciones que "puedan" resolverse en el conjunto de los números naturales

a) $\dfrac{\sqrt[3]{(5+3)}}{2}$ b) $(3-2)^2 + 3.\sqrt{25} - 4 : 2$ c) $43 - (16 : 2)^2$

d) $8 + \dfrac{(3-2)^2}{4} - \sqrt{64}$ e) $\sqrt{(\sqrt{625} + 39)}$ f) $(12 - 4 . 3)^4$

g) $\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{3} - 1$ h) $\dfrac{(15+6)^2}{7} - \sqrt{(3+8)} - 2$ i) $\dfrac{15}{(6-1)} - \dfrac{32}{2} + \dfrac{210}{7}$

2) En los siguientes desarrollos, explicar utilizando las propiedades vistas antes, cuáles son válidas y cuáles no; y por qué?

a) $5 - 3 = 3 - 5$ b) $(64 - 40) : 8 = 64 : 8 - 40 : 8$ c) $\sqrt[3]{8} . \sqrt{25} = \sqrt[6]{8 . 25}$

d) $\dfrac{(20-4)}{8} = \dfrac{20}{8} - \dfrac{4}{8}$ e) $40 : (2+8) = 40 : 2 + 40 : 8$

Números Enteros

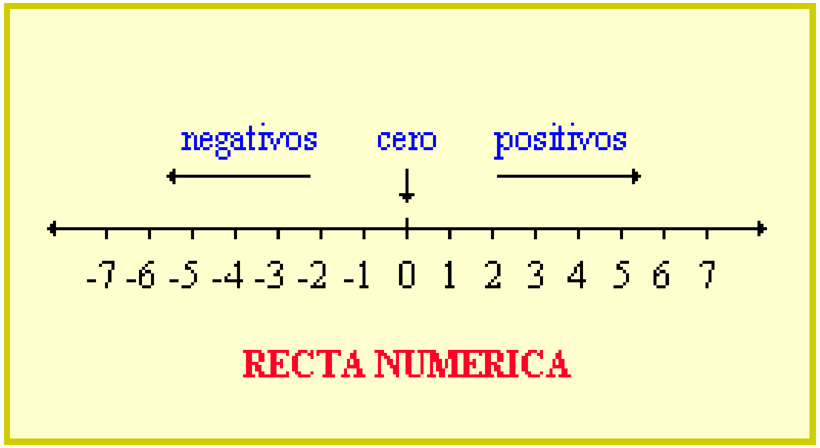
Para indicar si un objeto se encuentra a la derecha o a la izquierda de un punto de referencia, podemos indicar con un signo + si está hacia la derecha y con un signo - si se ubica hacia la izquierda. De esta forma obtenemos dos conjuntos:

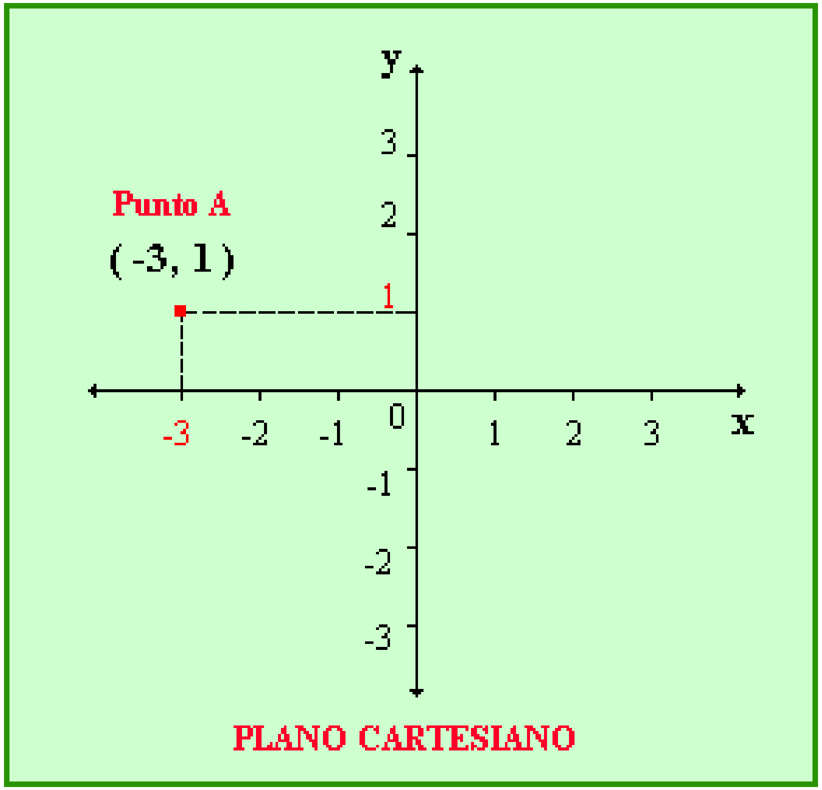
- Conjunto de números positivos
- Conjunto de números negativos

El conjunto formado por los números positivos, los números negativos y el cero se llama **conjunto de números enteros**.

Números Enteros

Representación Gráfica





Números Enteros

Opuesto

Dados dos números enteros diremos que son opuestos si su suma es cero.

Así (+6) y (-6) son opuestos pues (+6) + (-6) = 0.

Es fácil averiguar el opuesto de un entero, el opuesto de 2 es -2 , de -5 es 5 .....

El opuesto de un número se nota Op(-4)= (+4)

Valor absoluto

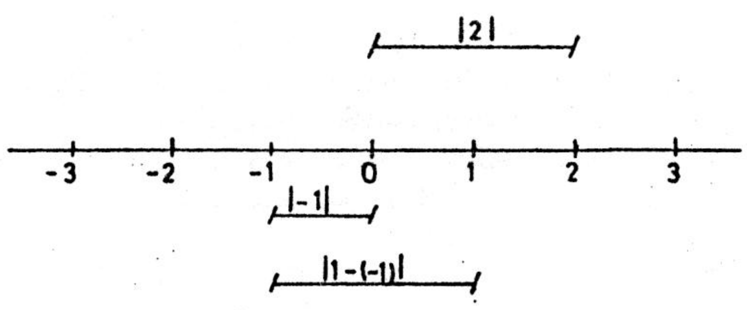
El valor absoluto de un entero coincide con él si es cero o positivo y es su opuesto si es negativo.

El valor absoluto de un número se nota colocando el número entre dos líneas verticales | |

$|+2| = |2| = 2$

$|-1| = |1| = 1$

$|1-(-1)| = |2| = 2$



Números Enteros

Suma de dos enteros

Cuando sumamos dos enteros se pueden presentar dos casos, que ambos enteros tengan el mismo signo o que tengan distinto signo.

Si tienen el mismo signo se suman las cantidades y se coloca su signo

$(+5) + (+7) = (+12)$

$(-3) + (-4) = (-7)$

Si tienen el distinto signo se restan las cantidades y se coloca el signo del mayor

$(+5) + (-7) = (-2)$

$(-3) + (+8) = (+5)$

Suma de varios enteros

Agrupamos aquellos enteros que tengan el mismo signo y los sumamos, luego restamos los que tienen distinto signo y colocamos el signo del mayor.

$(+2) + (-3) + (-4) = 2 -3 -4 =2 -7 = -5$

$(-12) + (-4) + (+8) = -12 - 4 +8 = -16 +8= -8$

Números Enteros

Resta

Restar un entero es equivalente a sumar su opuesto, es decir,

$$(+3) - (+9) = (+3) + (-9) = -6$$

Luego si queremos restar enteros, trasformamos la resta en suma de opuestos y sumamos.

Restemos varios enteros

$$(-9) - (+5) = (-9) + (-5) = -9 -5 = -14$$

$$(+12) - (-8) = (+12) + (+8) = 12 +8 = 20$$

$$(-19) - (+7) - (-6) = (-19) + (-7) + (+6) = -19 -7 +6 = -26 +6 = -20$$

Números Enteros

Producto

Regla de los signos

Signo resultante del producto de dos enteros

$(+) \cdot (+) = (+)$ $(+) \cdot (-) = (-)$

$(-) \cdot (-) = (+)$ $(-) \cdot (+) = (-)$

Producto de dos enteros

Si los dos enteros tienen el mismo signo, se multiplican sus valores absolutos y el signo resultante del producto es positivo, si tienen distinto signo se multiplican sus valores absolutos y el signo será negativo.

$(+5) \cdot (+7) = (+35)$ $(-3) \cdot (-8) = (+24)$

$(-4) \cdot (+9) = (-36)$ $(+6) \cdot (-2) = (-12)$

Producto de varios enteros

El producto de enteros es asociativo, es decir $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, luego cuando haya que multiplicar varios se multiplican de dos en dos y el resultado se multiplica por los factores que no hayan intervenido en ese producto.

$(+5) \cdot (+7) \cdot (-2) = (+35) \cdot (-2) = (-70)$ $(-3) \cdot (-8) \cdot (+4) = (+24) \cdot (+4) = (+96)$

$(-4) \cdot (+9) \cdot (-3) = (-36) \cdot (-3) = (+108)$ $(+6) \cdot (-2) \cdot (+4) = (-12) \cdot (+4) = (-48)$

Nota: Cuando entre dos enteros no aparece ningún signo se sobreentiende que se están multiplicando

$$(+3)(-7) = (-21)$$

Números Enteros

Cociente

Regla de los signos

Signo resultante del cociente de dos enteros

(+) : (+) = (+)   (+) : (-) = (-)

(-) : (-) = (+)   (-) : (+) = (-)

Cociente de dos enteros

Si los dos enteros tienen el mismo signo, se dividen sus valores absolutos y el signo resultante del cociente es positivo, si tienen distinto signo se dividen sus valores absolutos y el signo será negativo.

(+25) : (+5) = (+5)   (-33) : (-11) = (+3)

(-42) : (+6) = (-7)   (+63) : (-9) = (-7)

Números Enteros – Regla de los signos

Para el caso de la multiplicación y división, hay que atender a las siguientes reglas que nos dan el signo del resultado, dependiendo del signo de los factores.
Aclararemos aquí que en caso que un número sea negativo, nos referiremos a él como "menor que cero" ($a < 0$); mientras que si es positivo, diremos que es "mayor que cero" ($a > 0$).

Factores \ Operación	Multiplicación	División
$a > 0,\ b > 0$	$a.b > 0$	$a:b > 0$
$a > 0,\ b < 0$	$a.b < 0$	$a:b < 0$
$a < 0,\ b > 0$	$a.b < 0$	$a:b < 0$
$a < 0,\ b < 0$	$a.b > 0$	$a:b > 0$

Para la potenciación y la radicación se definen las siguientes reglas (deté tenerse en cuenta que en todos los casos el índice "n" es natural):

Factores \ Operación	Potenciación	Radicación
$a > 0,\ n$ par	$a^n = b > 0$	$b = \sqrt[n]{a}$ y $b = -\sqrt[n]{a}$ (Existen dos raíces iguales y opuestas)
$a > 0,\ n$ impar	$a^n = b > 0$	$\sqrt[n]{a} = b > 0$
$a < 0,\ n$ impar	$a^n = b < 0$	$\sqrt[n]{a} = b < 0$
$a < 0,\ n$ par	$a^n = b > 0$	No existe la raíz

Números Enteros

Operaciones combinadas

Las operaciones combinadas son operaciones mixtas sobre enteros, es decir, se hacen distintas operaciones, sumas, restas, productos o cocientes. Para ello es necesario establecer una prioridad a la hora de operar.

Prioridad de operaciones

En las operaciones combinada pueden aparecer corchetes [], paréntesis() , productos, cocientes, sumas o restas. Las prioridades operando son:

1. Corchetes
2. Paréntesis
3. Productos y cocientes
4. Sumas y restas Inicialmente calculamos las expresiones que hay dentro de cada corchete, si dentro de un corchete hay algún paréntesis se opera dentro del paréntesis.

$$4 [-9 (8-6-4) -8] +2 [- (-9+3+9) -3]$$

Se quitan los paréntesis que hay dentro de cada corchete operando con su contenido

$$4[-9(-2)-8]+2[-(+3)-3]$$

Calculamos dentro de los corchetes

$$4[18-8]+2[-6]=4\cdot 10+2\cdot(-6)$$

Finalmente multiplicamos y sumamos, concediendo prioridad al producto

$$40-12=28$$

Números Enteros - Ejercicios

EJERCICIOS

1) Resolver

a) $-5-(-3+(8+4-(3-10)-5)+2-1)+8$; b) $-18+(-2-(9-3+(-5-1))+11-6)$

c) $-(3-8-(4-3-(-5-2+10)+(-4+5)-3)+4-8)+2$; d) $-3+8-(-3)+4-(3-(-4+7-5+1)-2+3.(-1))-9$

e) $9:(-3)+(-2).(-1).5-12:(-1+4)-(-3).2.(-4)$; f) $72:(18+(-2).3)-(4.(-5)-9:3)$

g) $(3-5:(-1)+0.(-3)):(4-2.(-5)-10)$; h) $((7-4.3+(-2).5):(-2-1)).(-4)-(-3)$

i) $(60:(3+7.(-3)-(-6)))-(-5).(-5)$

2) Demostrar que en el conjunto $\mathbb{Z}$ se cumplen las propiedades:

a) $|a+b| \leq |a| + |b|$

b) $|a| - |b| \leq |a-b|$

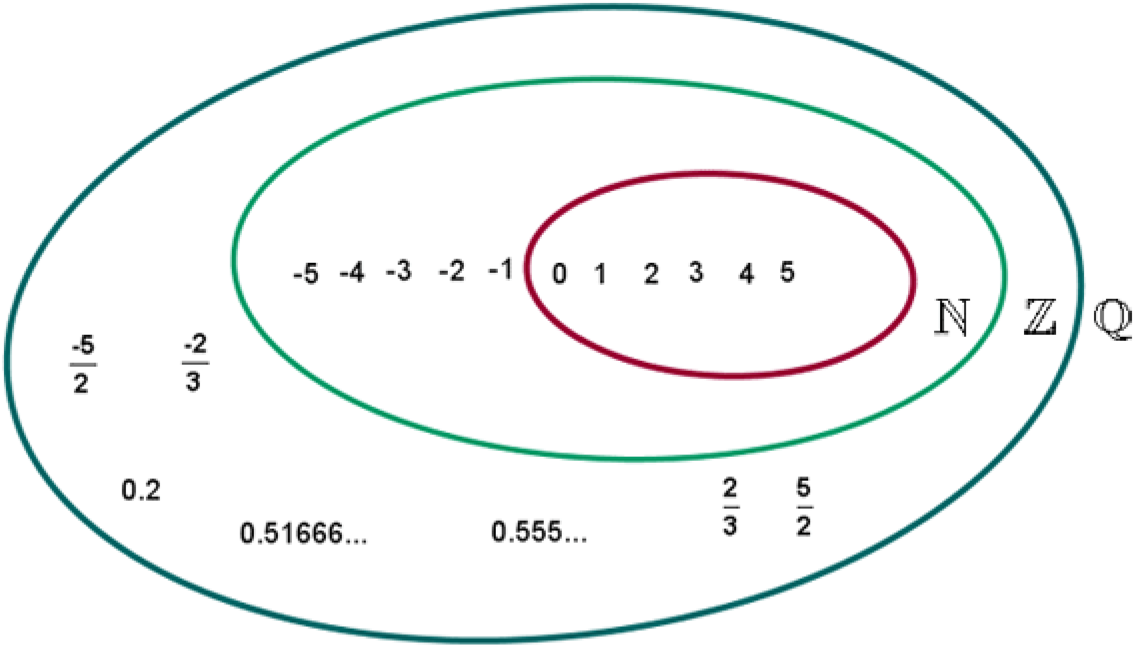
c) $|a| . |b| = |a . b|$

d) $\dfrac{|a|}{|b|} = \left|\dfrac{a}{b}\right|$

Números Racionales

Un **número racional** es todo **número** que puede representarse como el **cociente** de **dos enteros**, con denominador distinto de cero. Se representa por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;/\; a \in \mathbb{Z};\; b \in \mathbb{Z};\; b \neq 0 \right\}$$



Números Racionales - Operaciones

Suma y resta de números racionales

Con el mismo denominador

Se suman o se restan los numeradores y se mantiene el denominador.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

$$\frac{5}{7}+\frac{1}{7}=\frac{6}{7} \qquad \frac{5}{7}-\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$$

Con distinto denominador

En primer lugar **se reducen los denominadores a común denominador, y se suman o se restan los numeradores de las fracciones equivalentes obtenidas.**

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}$$

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{15+2}{12}=\frac{17}{12} \qquad \frac{5}{4}-\frac{1}{6}=\frac{15-2}{12}=\frac{13}{12}$$

Números Racionales - Operaciones

Propiedades de la suma de números racionales

1. **Interna:**

- $a + b \in \mathbb{Q}$

2. **Asociativa:**

- $(a + b) + c = a + (b + c)$ ·

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right)$$

$$\frac{2+1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}+\frac{2+3}{8}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}+\frac{5}{8} \qquad \frac{6+3}{8}=\frac{4+5}{8} \qquad \frac{9}{8}=\frac{9}{8}$$

3. **Conmutativa:**

- $a + b = b + a$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{2+1}{4}=\frac{1+2}{4} \qquad \frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

4. **Elemento neutro:**

- $a + 0 = a$

$$\frac{3}{4}+0=\frac{3}{4}$$

Números Racionales - Operaciones

Propiedades de la suma de números racionales

5. Elemento opuesto

- $a + (-a) = 0$

$$\frac{3}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3-3}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número.

$$-\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

Números Racionales - Operaciones

Multiplicación de números racionales

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{24}$$

Números Racionales - Operaciones

Propiedades de la multiplicación de números racionales

1. **Interna:**

- $a \cdot b \in \mathbb{Q}$

2. **Asociativa:**

- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{20} \qquad \frac{3}{40} = \frac{3}{40}$$

3. **Conmutativa:**

- $a \cdot b = b \cdot a$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{8} \qquad \frac{3}{40} = \frac{3}{40}$$

4. **Elemento neutro:**

- $a \cdot 1 = a$

$$\frac{3}{8} \cdot 1 = \frac{3}{8}$$

5. **Elemento inverso:**

- $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

$$5 \cdot \frac{1}{5} = 1$$

Números Racionales - Operaciones

Propiedades de la multiplicación de números racionales

6. **Distributiva:**

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4}=\frac{1}{8}+\frac{3}{4} \qquad \frac{7}{8}=\frac{7}{8}$$

7. **Sacar factor común:**

- $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)$$

Números Racionales - Operaciones

División de números racionales

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{5}{7} : \frac{1}{6} = \frac{30}{7}$$

Números Racionales - Operaciones

Potencias de números racionales

Potencias de exponente entero y base racional

- $$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a^{n}}{b^{n}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \frac{2^{4}}{3^{4}} = \frac{16}{81}$$

- $$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4} = \frac{3^{4}}{2^{4}} = \frac{81}{16}$$

- $$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$$

Números Racionales - Operaciones

Propiedades

1. $\left(\frac{a}{b}\right)^{0} = 1$

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^{1} = \frac{a}{b}$

3. **Producto de potencias con la misma base:**

- $$\left(\frac{a}{b}\right)^{m} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$$

4. **División de potencias con la misma base:**

- $$\left(\frac{a}{b}\right)^{m} : \left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{7} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{7-3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

5. **Potencia de una potencia:**

- $$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{m}\right]^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\right]^{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \frac{1^6}{2^6} = \frac{1}{64}$$

6. **Producto de potencias con el mismo exponente:**

- $$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{n} = \left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right)^{n}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{3} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{3} = \left(\frac{6}{35}\right)^{3}$$

7. **Cociente de potencias con el mismo exponente:**

- $$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} : \left(\frac{c}{d}\right)^{n} = \left(\frac{a \cdot d}{b \cdot c}\right)^{n}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{3} : \left(\frac{2}{7}\right)^{3} = \left(\frac{21}{10}\right)^{3}$$

Números Racionales - Decimales

Fracción decimal

Una fracción decimal tiene por **denominador la unidad seguida de ceros.**

$\frac{3}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{11}{1000}$

Número decimal

Es aquel que **se puede expresar mediante una fracción decimal.**

Consta de dos partes: entera y decimal.

$$\text{Parte entera} \leftarrow \boxed{3}.\boxed{25} \rightarrow \text{Parte decimal}$$

Para expresar un **número decimal** como una **fracción decimal**, escribimos como **numerador** de la fracción el **número** dado **sin la coma** y como **denominador** la **unidad seguida** de tantos **ceros** como **cifras decimales tenga ese número**.

$$1.13 = \frac{113}{100} \qquad 0.1769 = \frac{1769}{10000} \qquad 2234.1 = \frac{22341}{10}$$

Números Racionales - Decimales

Los **números decimales** (decimal exacto, periódico puro y periódico mixto) son **números racionales**; pero los otros números decimales ilimitados no.

Decimal exacto

La **parte decimal** de un **número decimal exacto** está compuesta por una cantidad **finita** de términos.

0.025, 3593.2, 5.22244587

Periódico puro

La parte decimal, llamada periodo, se repite infinitamente.

$3.222222... = 3.\widehat{2}$ $3.217217... = 3.\widehat{217}$

Periódico mixto

Su parte decimal está compuesta por una parte no periódica y una parte periódica o período.

$0.00522222... = 0.005\widehat{2}$ $4.55127127... = 4.55\widehat{127}$

No exactos y no periódicos

$\pi = 3.141592653589...$

Pasar de decimal exacto a fracción

Si la fracción es ***decimal exacta***, la fracción tiene como **numerador el número dado sin la coma, y por denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga.**

$$1.13 = \frac{113}{100} \qquad 0.1769 = \frac{1769}{10000} \qquad 2234.1 = \frac{22341}{10}$$

Pasar de periódico puro a fracción generatriz

Si la fracción es ***periódica pura***, la fracción generatriz tiene como **numerador el número dado sin la coma, menos la parte entera, y por denominador un número formado por tantos nueves como cifras tiene el período.**

$$1.\overset{\frown}{13} = \frac{113-1}{99} = \frac{112}{99} \qquad 0.\overset{\frown}{1769} = \frac{1769}{9999}$$

$$2234.\overset{\frown}{1} = \frac{22341-2234}{9} = \frac{20107}{9}$$

Pasar de periódico mixto a fracción generatriz

Si la fracción es ***periódica mixta***, la fracción generatriz tiene como **numerador el número dado sin la coma, menos la parte entera seguida de las cifras decimales no periódicas, y por denominador, un numero formado por tantos nueves como cifras tenga el período, seguidos de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal no periódica.**

$$1.1\overset{\frown}{3} = \frac{113-11}{90} = \frac{102}{90} = \frac{17}{15}$$

$$0.17\overset{\frown}{69} = \frac{1769-17}{9900} = \frac{1752}{9900} = \frac{438}{2475}$$

$$2.2\overset{\frown}{341} = \frac{22341-22}{9990} = \frac{20107}{9990} = \frac{22319}{9990}$$

Números Irracionales

Un **número** es **irracional** si posee **infinitas cifras decimales no periódicas**, por tanto **no se pueden expresar en forma de fracción**.

El **número irracional** más conocido es π, que se define como la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

- π = 3.141592653589...

Otros **números irracionales** son:

El número **e** aparece en procesos de crecimiento, en la desintegración radiactiva, en la fórmula de la catenaria, que es la curva que podemos apreciar en los tendidos eléctricos.

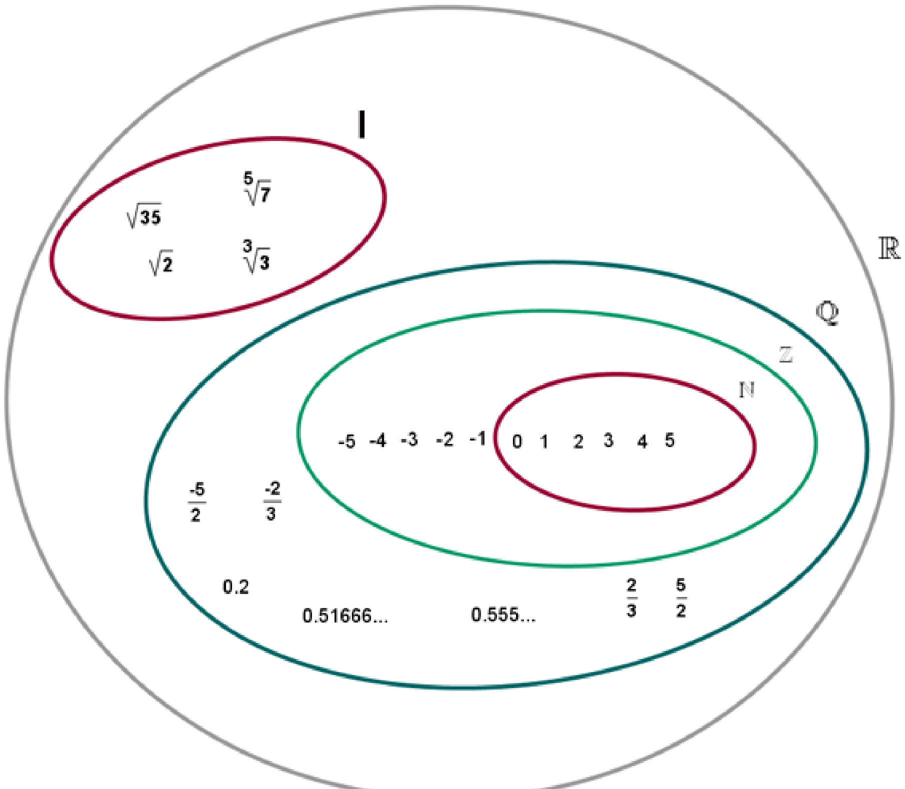
- **e** = 2.718281828459...

El **número áureo**, Φ, utilizado por artistas de todas las épocas (Fidias, Leonardo da Vinci, Alberto Durero, Dalí,..) en las proporciones de sus obras.

- $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618033988749...$

Números Reales

El **conjunto formado** por los números **racionales** e **irracionales** es el conjunto de los ***números reales***, se designa por $\mathbb{R}$



Con los **números reales** podemos realizar **todas las operaciones, excepto**

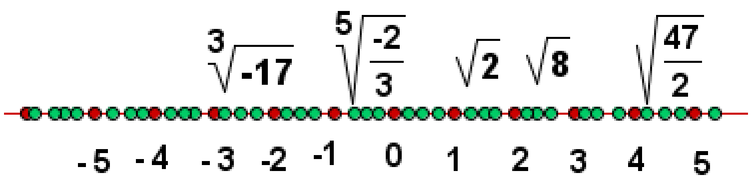
-la radicación de índice par y radicando negativo,

-y la división por cero

Números Reales

La recta real

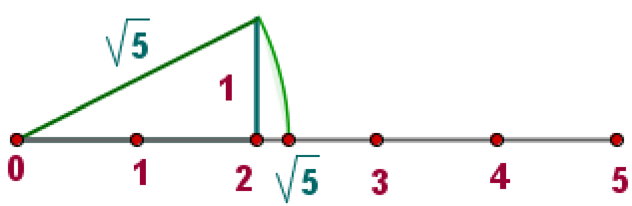
A todo **número real** le corresponde un punto de la recta y a **todo punto de la recta un número real.**



Representación de los números reales

Los **números reales** pueden ser representados en la recta con tanta aproximación como queramos, pero hay casos en los que podemos representarlos de forma exacta.

- $\sqrt{5} = 2^2 + 1^2$



Números Reales - Suma

Propiedades

1. **Interna:**

   El resultado de **sumar dos números reales** es otro **número real.**

   - $a + b \in \mathbb{R}$
   - $\pi + \Phi \in \mathbb{R}$

2. **Asociativa:**

   El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado.

   - $(a + b) + c = a + (b + c)$ ·
   - $\sqrt{2}+\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}$

3. **Conmutativa:**

   El orden de los sumandos no varía la suma.

   - $a + b = b + a$
   - $\sqrt{3}+\sqrt{5}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$

Números Reales - Suma

Propiedades

4. **Elemento neutro**:

   El **0** es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número.

   - $a + 0 = a$
   - $\pi + 0 = \pi$

5. **Elemento opuesto**

   Dos números son opuestos si al sumarlos obtenemos como resultado el cero.

   - $e - e = 0$

   El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número.

   - $-(-\Phi) = \Phi$

Diferencia de números reales

La **diferencia** de dos números reales se define como **la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo.**

- $a - b = a + (-b)$

Números Reales - Producto

La **regla de los signos** del **producto** de los **números enteros y racionales** se sigue manteniendo con los **números reales.**

+	por	+	=	+
-	por	-	=	+
+	por	-	=	-
-	por	+	=	-

Propiedades

1. **Interna:**

   El resultado de multiplicar dos números reales es otro número real.

   - $a \cdot b \in \mathbb{R}$

2. **Asociativa:**

   El modo de agrupar los factores no varía el resultado. Si a, b y c son números reales cualesquiera, se cumple que:

   - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
   - $(e \cdot \pi) \cdot \Phi = e \cdot (\pi \cdot \Phi)$

3. **Conmutativa:**

   El orden de los factores no varía el producto.

   - $a \cdot b = b \cdot a$
   - $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2}$

Números Reales - Producto

4. Elemento neutro:

El 1 es el elemento neutro de la multiplicación, porque todo número multiplicado por él da el mismo número.

- $a \cdot 1 = a$
- $\pi \cdot 1 = 1$

5. Elemento inverso:

Un número es inverso del otro si al multiplicarlos obtenemos como resultado el elemento unidad.

- $a \cdot \frac{1}{a} = 1$
- $\pi \cdot \frac{1}{\pi} = 1$

6. Distributiva:

El producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos.

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $\pi \cdot (e + \Phi) = \pi \cdot e + \pi \cdot \Phi$

7. Sacar factor común:

Es el proceso inverso a la propiedad distributiva.

Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor.

- $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$
- $\pi \cdot e + \pi \cdot \Phi = \pi \cdot (e + \Phi)$

Números Reales

División

La división de dos números reales se define como el producto del dividendo por el inverso del divisor.

Potencias

Potencias con exponente entero

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$a \neq 0$

$$e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

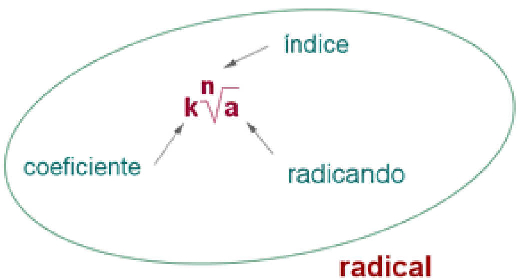
Con exponente racional o fraccionario

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Números Reales - Radicales

Un **radical** es una expresión de la forma $\sqrt[n]{a}$, en la que $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}$; con tal que cuando *a* sea negativo, *n* ha de ser impar.



$$\sqrt{64} = \pm 8 \qquad \sqrt{-64} \notin \mathbb{R}$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \sqrt[3]{-8} = -2$$

Potencias y radicales

Se puede expresar un **radical** en forma de **potencia**:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^{\frac{8}{2}} = 2^4 = 16$$

Números Reales - Radicales

Radicales equivalentes

Utilizando la notación de exponente fraccionario y la propiedad de las fracciones que dice que si se multiplica numerador y denominador por un mismo número la fracción es equivalente, obtenemos que:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k \cdot m}{k \cdot n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$$

Si se multiplican o dividen el **índice** y el **exponente** de un **radical** por un mismo **número natural**, se obtiene otro **radical equivalente**.

$$\sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$$

Simplificación de radicales

Si existe un **número natural** que divida al **índice** y al **exponente** (o los exponentes) del radicando, se obtiene un **radical simplificado**.

$$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt[2]{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

Números Reales - Radicales

Reducción de radicales a índice común

1 Hallamos el **mínimo común múltiplo de los índices**, que será el común índice

2 **Dividimos el común índice por cada uno de los índices** y cada resultado obtenido **se multiplica por sus exponentes** correspondientes.

$$\sqrt{2} \qquad \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} \qquad \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}$$

- $\text{m.c.m.}(2, 3, 4) = 12$
- $\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{(2^2)^4 \cdot (3^2)^4} \qquad \sqrt[12]{(2^2)^3 \cdot (3^3)^3}$
- $\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8} \qquad \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^9}$

Números Reales - Radicales

Extracción de factores fuera del signo radical

Se descompone el radicando **en factores**. Si:

1 Un **exponente es menor** que el índice, el factor correspondiente **se deja en el radicando**.

- $\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3}$
- $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2}$

2 Un **exponente es igual** al índice, el factor correspondiente **sale fuera del radicando**.

- $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$
- $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

3 Un exponente **es mayor que el índice**, **se divide** dicho exponente **por el índice**. El **cociente** obtenido es el **exponente del factor fuera** del radicando y el **resto** es el **exponente del factor dentro** del radicando.

- $\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = 2^2\sqrt{3}$ $\qquad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$
- $\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3\sqrt[3]{3^2}$ $\qquad \begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$
- $\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^5} = 3 \cdot 5^2\sqrt{2 \cdot 5}$
- $\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5\sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2}$

Números Reales - Radicales

Introducción de factores dentro del signo radical

Se **introducen** los **factores** elevados al **índice** correspondiente del **radical**.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n\, b}$$

$2\sqrt{3}$

- $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$

$2^2 \cdot 3^3\ \sqrt[4]{6}$

- $= \sqrt[4]{\left(2^2\right)^4 \cdot \left(3^3\right)^4 \cdot 2 \cdot 3} =$
- $= \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^9 \cdot 3^{13}}$

Números Reales - Radicales

Suma de Radicales

Solamente pueden **sumarse** (o **restarse**) **dos radicales** cuando son **radicales semejantes**, es decir, si son **radicales** con el **mismo índice** e **igual radicando**.

$$a\sqrt[n]{k}+b\sqrt[n]{k}+c\sqrt[n]{k}=(a+b+c)\sqrt[n]{k}$$

$$2\sqrt{2}-4\sqrt{2}+\sqrt{2}=(2-4+1)\sqrt{2}=-\sqrt{2}$$

$$3\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{5}=(3-2-1)\sqrt[4]{5}=0$$

$$\sqrt{12}-3\sqrt{3}+2\sqrt{75}=\sqrt{2^2\cdot 3}-3\sqrt{3}+2\sqrt{5^2\cdot 3}=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+10\sqrt{3}=9\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{4}+\sqrt[6]{8}-\sqrt[12]{64}=\sqrt[4]{2^2}+\sqrt[6]{2^3}-\sqrt[12]{2^6}=\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

Números Reales – Producto de Radicales

Radicales del mismo índice

Para **multiplicar radicales con el mismo índice se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice.**

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{6} =$

- $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2\cdot 3} = 2\sqrt{3}$

Cuando terminemos de realizar una operación **extraeremos factores del radical**, si es posible.

Radicales de distinto índice

Primero se **reducen a índice común** y luego **se multiplican.**

$\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{27} =$

- $m.c.m.(2,3,4) = 12$
- $\sqrt[12]{3^6}\cdot\sqrt[12]{(3^2)^4}\cdot\sqrt[12]{(3^3)^3} = \sqrt[12]{3^6\cdot 3^8\cdot 3^9} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3\ \sqrt[12]{3^{11}}$

$\sqrt{12}\cdot\sqrt[3]{36} =$

- $\text{m.c.m.}(2,3) = 6$
- $\sqrt[6]{12^3}\cdot\sqrt[6]{36^2} = \sqrt[6]{(2^2\cdot 3)^3\cdot(2^2\cdot 3^2)^2} = \sqrt[6]{2^6\cdot 3^3\cdot 2^4\cdot 3^4} = \sqrt[6]{2^{10}\cdot 3^7} = 6\sqrt[6]{2^4\cdot 3}$

Números Reales – Cocientе de Radicales

Radicales del mismo índice

Para dividir radicales con el mismo índice **se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.**

- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} =$$

- $\dfrac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\dfrac{128}{16}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^7}{2^4}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

Radicales de distinto índice

Primero se **reducen a índice común** y luego **se dividen.**

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$$

- $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\dfrac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{\left(2^2\right)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$

Cuando terminemos de realizar una operación **simplificaremos el radical**, si es posible.

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$$

- $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\dfrac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{\left(2^2\right)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$

Números Reales – Potencia de Radicales

Para elevar un **radical** a una **potencia**, se eleva a dicha **potencia** el **radicando** y se deja el **mismo índice**.

- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\left(\sqrt[3]{18}\right)^2 =$

- $\left(\sqrt[3]{18}\right)^2 = \sqrt[3]{18^2} = \sqrt[3]{\left(2 \cdot 3^2\right)^2} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^4} = 3\sqrt[3]{12}$

$\left(\dfrac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 =$

- $\left(\dfrac{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[4]{18}}{\sqrt{6}}\right)^4 = \dfrac{\sqrt[3]{(12)^4} \cdot \sqrt[4]{(18)^4}}{\sqrt{(6)^4}} = \dfrac{\sqrt[3]{\left(2^2 \cdot 3\right)^4} \cdot 18}{\sqrt{(2 \cdot 3)^4}} =$
- $= \dfrac{18 \cdot \sqrt[3]{2^8 \cdot 3^4}}{\sqrt{2^4 \cdot 3^4}} = 18\sqrt[6]{\dfrac{\left(2^8 \cdot 3^4\right)^2}{\left(2^4 \cdot 3^4\right)^3}} = 18\sqrt[6]{\dfrac{2^{16} \cdot 3^8}{2^{12} \cdot 3^{12}}} =$
- $= 18\sqrt[6]{\dfrac{2^4}{3^4}} = 18\sqrt[3]{\dfrac{2^2}{3^2}} = 18\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}$

Números Reales – Raíz de un Radical

La **raíz de un radical** es otro **radical** de **igual radicando** y cuyo **índice** es el **producto de los dos índices.**

- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} =$

- $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$

$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} =$

- $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^4\sqrt[4]{2}}} =$
- $= \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{(2^4)^4 \cdot 2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{16} \cdot 2}}} = \sqrt[24]{2^{17}}$

Números Reales – Racionalización

La racionalización de radicales consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Podemos distinguir tres casos.

1 **Racionalización** del tipo $\frac{a}{b\sqrt{c}}$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\cdot c}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

Números Reales – Racionalización

2 **Racionalización** del tipo $\dfrac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$.

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m}\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m\cdot c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^n}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\cdot c}$$

$$\frac{2}{3\sqrt[5]{4}} = \frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2\cdot\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}} = \frac{2\sqrt[5]{8}}{3\sqrt[5]{2^5}} = \frac{2\sqrt[5]{8}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

3 **Racionalización** del tipo $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, y en general cuando el denominador sea un **binomio con al menos un radical.**

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado:

$a+b \rightarrow a-b$

$-a+b \rightarrow -a-b$

$a-b \rightarrow a+b$

$-a-b \rightarrow -a+b$

Números Reales – Racionalización

También tenemos que tener en cuenta que: "**suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados**".

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2-3}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{-1}=-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

$$\frac{2}{4-2\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}=\frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{\left(4-2\sqrt{2}\right)\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{4^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{16-4\cdot 2}=\frac{2\cdot\left(4+2\sqrt{2}\right)}{8}=\frac{4+2\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{5-2\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)}{\left(5-2\sqrt{6}\right)\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)}=\frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{12}}{5^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}=$$

$$=\frac{10\sqrt{2}+4\sqrt{2^2\cdot 3}}{25-4\cdot 6}=\frac{10\sqrt{2}+8\sqrt{3}}{25-24}=10\sqrt{2}+8\sqrt{3}$$

Resumen

Números

- Reales $\mathbb{R}$
  - Racionales $\mathbb{Q}$
    - **Enteros** $\mathbb{Z}$
      - Naturales $\mathbb{N}$
        - Primos
        - Compuestos
      - Cero
      - Negativos
    - Fraccionarios
      - Fracción propia
      - Fracción impropia
  - Irracionales
    - Algebraicos
    - Trascendentes