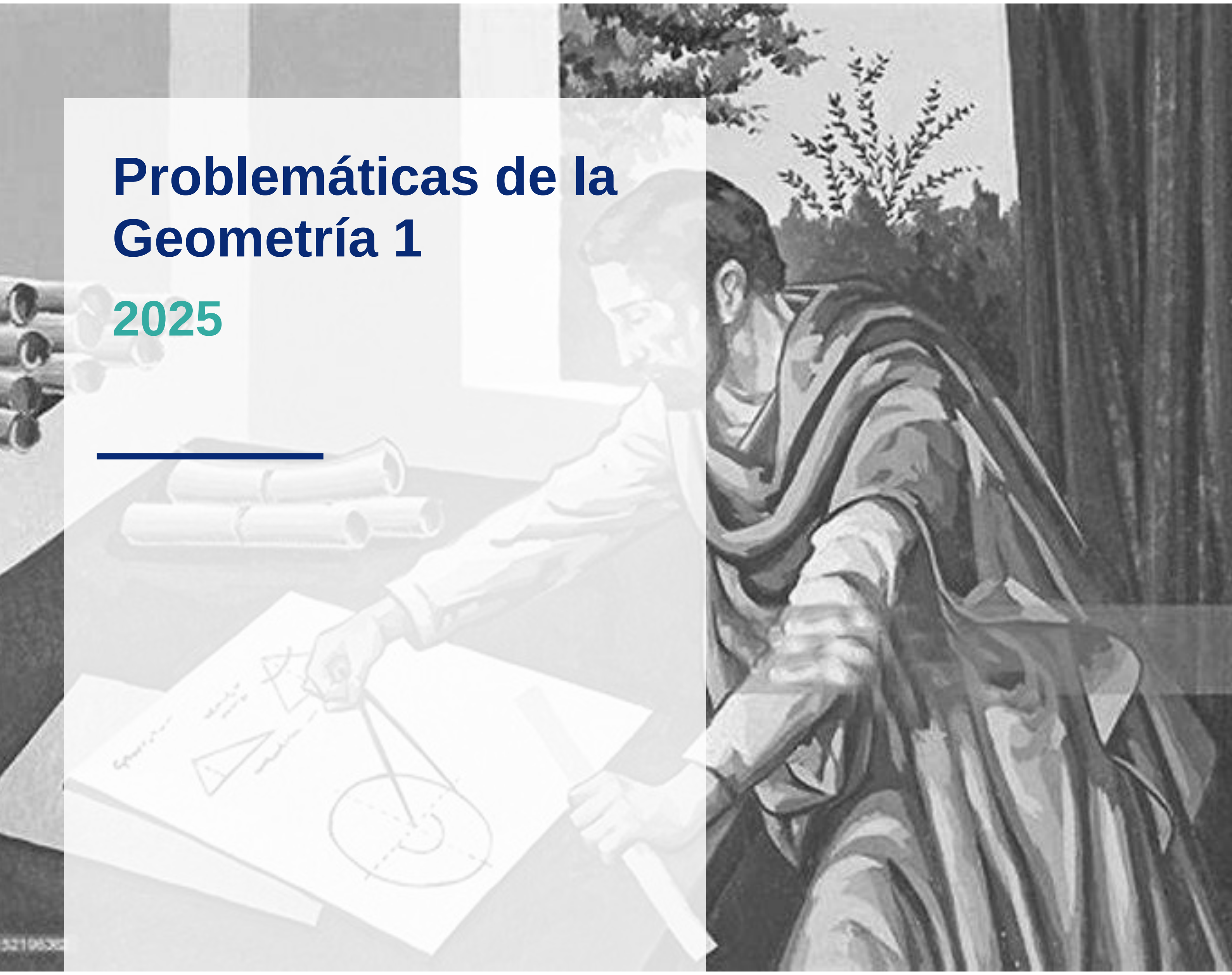


Problemáticas de la Geometría 1

2025

ALFABETIZACIÓN ACADÉMICA

Profesora: María José Acosta

Primer Año

Instituto Superior Zarela Moyano de Toledo

Palabras de Inicio

Queridos estudiantes:

Imagino la ansiedad de comenzar a leer estas páginas y hacer el esfuerzo por recordar todo lo visto en el nivel secundario… tranquilos, a controlar la ansiedad. El camino es largo y este es solo el primer escalón.

Este espacio curricular, denominado Problemáticas de la Geometría 1, quiere acercarles a Ustedes los conceptos básicos y las relaciones, de la Geometría Euclidiana. Cabe preguntarse, ¿cuál es la Geometría Euclidiana? ¿Es la que me enseñaron en el secundario? ¿Por qué será euclidiana?, entre otros interrogantes que quizás se están formulando.

Quiero comentarles que nuestro estudio comenzará desde los conceptos primitivos, a partir de ellos, iremos construyendo todo el marco teórico, siempre acompañando nuestra formación con construcciones y razonamientos deductivos.

Pensar geométricamente demanda paciencia, dedicación, esfuerzo, constancia y mucho estudio, es necesario dejar de lado, el miedo a equivocarse y aceptar, que algunas veces, existen más de una posibilidad de respuestas o tal vez ninguna…

Este material persigue el objetivo de comprender qué estudia la Geometría, cómo lo estudia y acercarnos a uno de los programas digitales más usados en esta disciplina.

Les recomiendo dejar fluir sus conocimientos previos, anoten todas las respuestas que consideren necesarias, al igual que las dudas o inquietudes que puedan surgir. Cada una de ellas serán abordadas en las clases presenciales.

Les deseo un buen comienzo en este apasionante camino, llamado Geometría Euclidiana.

Un saludo grande.

Prof. María José Acosta

Introducción a la Geometría Euclidiana

Breve recorrido histórico

Las personas desarrollan de manera natural gran cantidad de conocimientos geométricos. Estos conocimientos se adquieren desde la infancia y tienen su origen en la capacidad de los seres humanos para observar y reconocer las características exteriores de los objetos y comparar formas y tamaños.
Desde muy pronta edad se adquiere la noción de distancia y se aprende que el camino más corto entre dos puntos es la línea recta. Se reconoce la conveniencia de que ciertas superficies estén limitadas por líneas rectas, lo que conduce a las primeras figuras geométricas, como son los cuadrados, rectángulos y otros polígonos.
Otras situaciones de la vida cotidiana conducen a nociones como las de líneas verticales y horizontales, líneas paralelas y perpendiculares; a distinguir entre líneas curvas y rectas, o entre los cuerpos redondos y aquellos que tienen sus caras planas.
Pueden darse muchos más ejemplos, pero los anteriores muestran cómo del universo aparentemente desorganizado de las formas físicas que nos rodean, se extrajeron, desde las épocas más remotas, las figuras más ordenadas de la geometría. Estas formas geométricas simples las utilizó el hombre de la antigüedad para elaborar frisos, grecas y otros ornamentos. No cabe duda de que junto con las necesidades de orden práctico, el arte primitivo contribuyó notablemente al desarrollo de la geometría.
Es muy probable que los primeros hombres no se hayan preocupado por sistematizar los conocimientos adquiridos a partir de la experiencia cotidiana, limitándose a resolver problemas aislados entre sí, sin observar o considerar las relaciones entre ellos. Algo muy importante ocurrió cuando se dieron cuenta de que había grupos de problemas que podían resolverse con el mismo procedimiento y aprendieron a extraer reglas generales de una multitud de casos particulares.

Actividad 1

- Leer comprensivamente: **“Introducción a la Geometría Euclidiana”**, extraído Geometría y Trigonometría.
- Extraer las ideas centrales del texto propuesto.
- Elaborar un esquema o cuadro que permita analizar la evolución de la Geometría.
- Responder a los siguientes interrogantes: ¿Qué es un sistema axiomático? ¿Cuál es su importancia?

Actividad 2

- Leer comprensivamente la Introducción del libro **“Iniciación al estudio didáctico de la Geometría”**, de Horacio Itzcovich.
- Enumere aquellas ideas, presentes en el texto que para su criterio han sido significativas.
- En base a lo compartido en el texto responda a las siguientes preguntas.

- ¿Cuánto tiempo hace que la Geometría fue perdiendo espacio en la escuela? ¿Qué se privilegió en los últimos años en la escuela, dejando de lado la geometría? ¿Qué consecuencias generó?
- ¿Qué debe aprender un estudiante, futuro docente, durante la formación inicial como docente de geometría?
- ¿Cuáles son las capacidades que se deben estimular en los alumnos para que ellos logren desarrollar un pensamiento geométrico?
- ¿Cuál es la importancia de las construcciones, las representaciones y el lenguaje algebraico en el pensamiento geométrico?

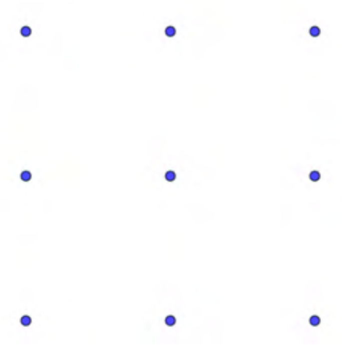
Introducción a la Geometría Euclidiana

Activando los conocimientos geométricos

Desde los inicios de la historia, el ser humano ha intentado representar su entorno visual dibujando los objetos y figuras que lo rodean.
Para ello ha necesitado disponer de alguna superficie sobre la que trazar puntos, líneas, círculos u otras figuras. Desde los petroglifos esculpidos en piedra a las pinturas renacentistas o a los modernos planos utilizados en la arquitectura o la ingeniería, disponemos de innumerables ejemplos de representaciones elaboradas sobre superficies más o menos planas.
El plano es por lo tanto un objeto que cobra importancia para la geometría, ya que nos permite representar figuras sobre él.
Dentro del plano distinguimos dos elementos fundamentales, tal y como Euclides los definió: el punto y la recta.
Los conceptos de PUNTO, RECTA y PLANO constituyen la base del gran edificio que conforma la Geometría. Se los conoce con el nombre de conceptos primitivos, son ideas o abstracciones que no podemos definir con términos más sencillos o por otros términos ya conocidos.
A partir de estos conceptos y de relaciones evidentes, llamadas axiomas, surgen nuevos conceptos y más propiedades.

Actividad N* 1

Se disponen 9 puntos, como se muestra a continuación:



a) Una con una línea los 9 puntos, sin pasar dos veces por el mismo punto y sin levantar el lápiz de la hoja.
b) Una con 4 rectas los 9 puntos.
c) Una con 4 segmentos los 9 puntos, sin pasar dos veces pro el mismo punto y sin levantar el lápiz de la hoja.

Reflexionemos sobre lo trabajado:

a) ¿Cuáles han sido los obstáculos que se le presentaron al resolver esta actividad?
b) ¿Todas las situaciones planteadas se pudieron resolver? ¿Por qué? ¿Alguna consigna permitió más de una respuesta?
c) ¿Qué conceptos geométricos necesitó conocer para resolver lo pedido?

Actividad N* 2

Pensar los siguientes interrogantes y luego darles una respuesta.

a) ¿Cómo puede construir un punto con una hoja de papel? Explíquelo.
b) ¿Cuántas posibilidades hay de dibujar cinco puntos diferentes?

Actividad N* 3

Dibuje 4 (cuatro) puntos distintos que determinen, si es posible, cada una de las siguientes situaciones planteadas.

a) Sólo cuatro rectas
b) Sólo seis rectas
c) Sólo una recta

Reflexionemos sobre lo trabajado:

¿Ha podido construir las situaciones propuestas? ¿Cuáles no se pudieron dibujar? ¿Qué dificultades se le han presentado?

Actividad N* 4

¿Qué observa en la figura? Descríbala de dos maneras diferentes

Actividad N* 5

Trace tres rectas de modo que cada una de ellas corte a las otras tres. Marque los puntos de intersección de cada par de rectas. ¿Cuántos puntos determinan las tres rectas? ¿Se puede generalizar que, si se tenemos cinco rectas, éstas determinan 5 puntos de intersección?

Actividad N* 6

Dibuje las siguientes trayectorias.

a) La trayectoria de una mosca en movimiento.

b) La trayectoria del centro de una rueda (Puede ser de una bicicleta) cuando se desplaza sobre una superficie totalmente plana.

Introducción a la Geometría Euclidiana

La Notación en Geometría

Notación es la acción y efecto de notar (señalar, advertir, apuntar). El término proviene del latín y hace referencia al sistema de signos convencionales que se adopta para expresar algún concepto.
Podemos señalar diferentes tipos de notaciones: matemáticas, musical, científica entre otras.
Aquí nos centraremos en la notación usada en Geometría.
A los conceptos primitivos los anotamos del siguiente modo:

- Puntos: con letras mayúsculas de imprenta.
- Rectas: con letras minúsculas.
- Planos: con letras griegas.

¿Qué letras griegas conoce?

RELACIÓN DE PERTENENCIA Y DE INCLUSIÓN

De pertenencia

> **Cuando un objeto es uno de los elementos de un conjunto decimos que pertenece al conjunto.**

Realiza en tu carpeta:

- Traza una recta $\overleftrightarrow{r}$. Una recta es un conjunto de puntos: cada punto es un elemento del conjunto.
- Marca dos puntos A y B sobre la recta, y dos puntos C y D fuera de ella.

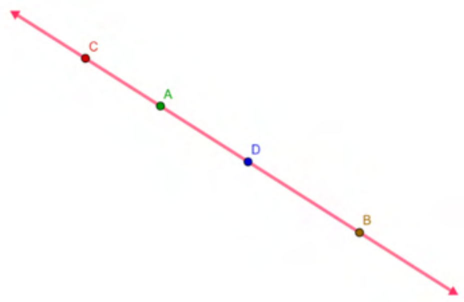
¿Cómo lo anotamos?

- Indicamos que un punto A pertenece a la recta escribiendo $A \in \overleftrightarrow{r}$.
- Indicamos que un punto Q no pertenece a la recta escribiendo $D \notin \overleftrightarrow{r}$.

De inclusión

> **Un conjunto está incluido en otro conjunto cuando TODOS sus elementos también pertenecen al otro conjunto.**

Observemos la siguiente situación:



Se ha dibujado una recta y se han marcado sobre ella 4 puntos: A, B, C, D.

La recta $\overleftrightarrow{AB}$ es un conjunto de puntos, los segmentos $\overline{DC}$ y $\overline{CB}$ son conjuntos de puntos.

Si observamos todos los puntos del segmento $\overline{CB}$ están en la recta $\overleftrightarrow{AB}$, entonces decimos que $\overline{CB}$ está incluido en $\overleftrightarrow{AB}$. Lo anotamos: $\overline{CB} \subset \overleftrightarrow{AB}$

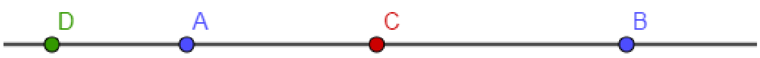
Podemos afirmar que el segmento $\overline{DC}$ no está incluido en $\overline{AB}$, solo comparten algunos puntos y no todos. Lo anotamos: $\overline{DC} \not\subset \overline{AB}$.

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Unión de Conjuntos

La unión de dos o más conjuntos es un conjunto formado por todos los elementos de estos conjuntos. (Su notación ∪)

Por ejemplo, en la siguiente situación:



$$\overline{DA} \cup \overline{AC} = \overline{DC}$$

Intersección de Conjuntos

La intersección de dos conjuntos es el conjunto que contiene aquellos elementos comunes a ambos conjuntos. (Su notación ∩).

Considerando la situación anterior:

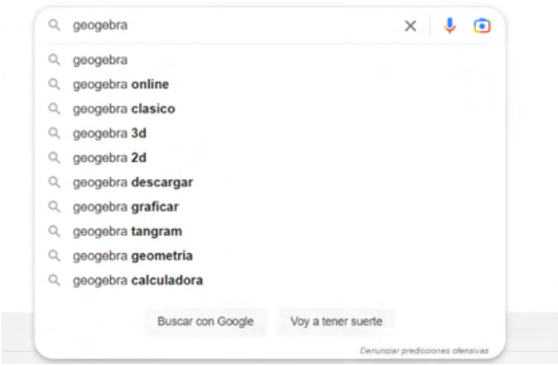
$$\overline{AB} \cap \overline{DC} = \overline{AC}$$

Introducción a la Geometría Euclidiana

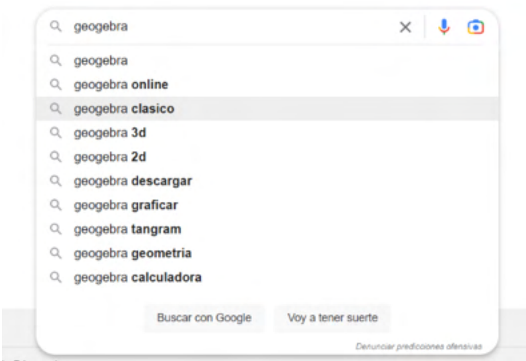
Usando herramientas digitales

GeoGebra es un software matemático dinámico para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hojas de cálculo, gráficas, estadísticas y cálculo en un solo motor.
A continuación, les indicaré cómo aprender a instalar en nuestro ordenador el programa, “GeoGebra”, de gran utilidad para la enseñanza de geometría y funciones.

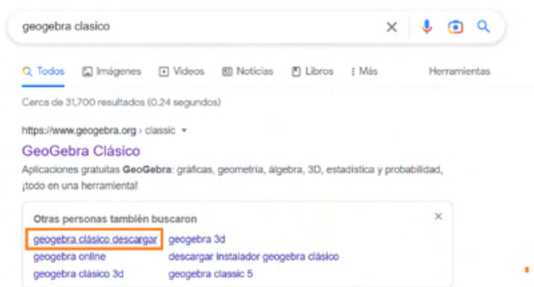
1) Colocar en el buscador “Google” la palabra GeoGebra. Se presentarán diferentes opciones.



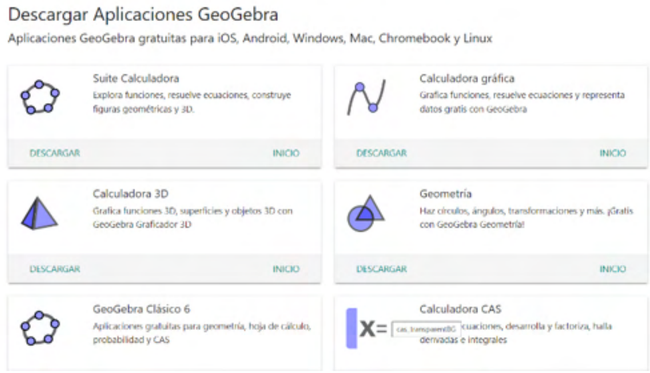
2) Escoger la opción “GeoGebra Clásico”.



3) Descargar el programa en la computadora o celular.



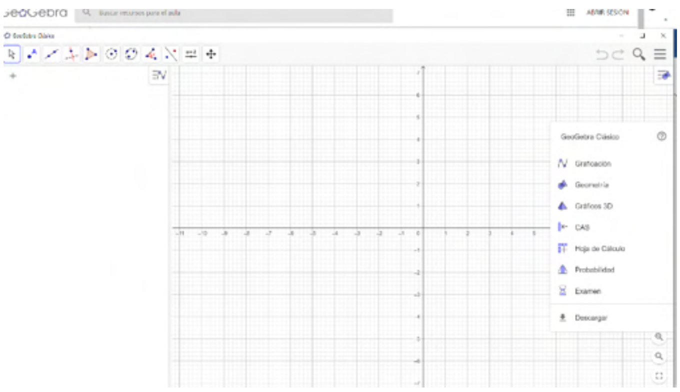
4) Se abrirá una nueva ventana, elegir la opción "GeoGebra Clásico 6". Hacer clic en DESCARGAR.



5) Se pedirá elegir la carpeta donde se quiera guardar el programa.

6) Hacer clic en el programa y elegir la opción EJECUTAR.

7) Se abrirá la siguiente ventana, encontrándose listo para comenzar a trabajar.



Actividad 1

Utilizando el menú de la parte superior de la pantalla del GeoGebra construya:

a) Una recta $\overleftrightarrow{AB}$ que interseque a otra recta en un punto llamado C.
b) Realice una captura de pantalla, guárdela en formato "Imagen JPG" e insértela en un documento Word.

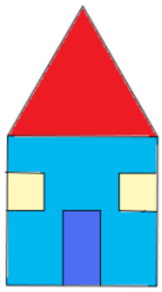
Actividad 2

a) Dibuje un segmento $\overline{AB}$ de cinco unidades de longitud.
b) Trace una recta perpendicular a dicho segmento por el punto B.
c) Determine el punto medio de $\overline{AB}$, llámelo M.
d) Construya una semirrecta con origen en M.

e) Realice una captura de pantalla, guárdela en formato “Imagen JPG” e insértela en un documento Word.

Actividad 3

Utilizando tres cuadrados, un triángulo equilátero y un rectángulo (puerta) construir la figura adjunta.



a) Realice una captura de pantalla, guárdela en formato “Imagen JPG” e insértela en un documento Word.

1. INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

1.1 Historia de la Geometría

Las matemáticas son tan antiguas como la propia humanidad en los diseños prehistóricos de cerámica, tejidos y en las pinturas rupestres se pueden encontrar evidencias del sentido geométrico y del interés en figuras geométricas.

Las matemáticas son una de las ciencias más antiguas, y más útiles. El concepto de matemáticas, se comenzó a formar, desde que el hombre vio la necesidad de contar objetos, esta necesidad lo llevó a la creación de sistemas de numeración que inicialmente se componían con la utilización de los dedos, piernas, o piedras. Los sistemas de cálculo primitivos estaban basados, seguramente, en el uso de los dedos de una o dos manos, lo que resulta evidente por la gran abundancia de sistemas numéricos en los que las bases son los números 5 y 10.

La historia de las matemáticas o del cálculo comienza desde que el hombre ve la necesidad de contar. La palabra cálculo proviene del latín *calculus*, que significa contar con piedras.

Las matemáticas son el estudio de las relaciones entre cantidades, magnitudes y propiedades, y de las operaciones lógicas utilizadas para deducir cantidades, magnitudes y propiedades desconocidas. En el pasado las matemáticas eran consideradas como la ciencia de la cantidad, referida a las magnitudes (como en la geometría), a los números (como en la aritmética), o a la generalización de ambos (como en el álgebra). Hacia mediados del siglo XIX las matemáticas se empezaron a considerar como la ciencia de las relaciones, o como la ciencia que produce condiciones necesarias. Esta última noción abarca la lógica matemática o simbólica, ciencia que consiste en utilizar símbolos para generar una teoría exacta de deducción e inferencia lógica basada en definiciones, axiomas, postulados y reglas que transforman elementos primitivos en relaciones y teoremas más complejos.

La historia del origen de la Geometría es muy similar a la de la Aritmética, siendo sus conceptos más antiguos consecuencia de las actividades prácticas. Los primeros hombres llegaron a formas geométricas a partir de la observación de la naturaleza.

No solo el origen de los conocimientos geométricos, sino diversos aspectos, como la necesidad de comparar las áreas y volúmenes de figuras simples, la construcción de canales y edificios, las figuras decorativas, los movimientos de los astros, contribuyeron al nacimiento de las reglas y propiedades geométricas que se encuentran en los documentos de las antiguas civilizaciones egipcia y mesopotámica.

Los asirios y babilonios

La rueda inventada por los sumerios 3500 años A.C., marca en la historia el inicio de la civilización; inventaron la escritura, crearon la aritmética y las construcciones de sus ciudades revelan la aceptación de las figuras geométricas. En la antigua Mesopotamia florece la cultura de los babilonios, herederos de los sumerios.

Tenían el conocimiento de cómo calcular el área de algunas figuras geométricas como el rectángulo, el triángulo y el trapecio; así como el volumen de algunos prismas rectos y pirámides de base cuadrada. Es probable que descubrieran las propiedades de la circunferencia, ya que asignaron a π un valor de 3, estableciendo la relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo.

Los egipcios

Una antigua opinión transmitida por Herodoto, historiador griego (484-420 A.C), atribuyó a los egipcios el descubrimiento de la Geometría, ya que, según él, necesitaban medir constantemente sus tierras debido a que las inundaciones del río Nilo borraban continuamente sus extensiones. La aplicación de sus conocimientos geométricos se hicieron sobre la medida de la tierra, de lo cual se deduce el significado etimológico de Geometría, cuyas raíces griegas son: *GEO* (tierra) y *METRON* (medida).

Los egipcios aplicaron sus conocimientos de geometría en la construcción de pirámides como la de KEOPS, KEFREN y MEKERINOS, que son cuadrangulares y sus caras laterales son triángulos equiláteros, la de KEOPS es una de las siete maravillas del mundo donde se ha comprobado que además de la precisión en sus dimensiones está perfectamente orientada.

Los conocimientos de los egipcios están contenidos en cinco papiros, siendo el de mayor interés el de RHIND donde se establecen las reglas para calcular el área del triángulo isósceles, área del trapecio isósceles y el área del círculo. Determinaron el valor de 3.1604 como relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo, valor mucho más aproximado que el de los babilonios para π.

Los griegos

Los conocimientos egipcios sobre la geometría eran netamente empíricos, ya que no se cimentaban en una sistematización lógica deducida a partir de axiomas y postulados.

El pensamiento racional de los griegos condujo a los primeros matemáticos a buscar no sólo el "cómo", sino además el "porqué" de los fenómenos y de la realidad que los rodeaba. Para ellos las matemáticas tenían un objetivo principal; entender el lugar que ocupa el ser humano en el Universo, de acuerdo a un esquema racional.

En Grecia comienza la geometría como ciencia deductiva, con los matemáticos, Tales de Mileto, Herodoto, Pitágoras de Samos y Euclides de Alejandría; quienes fueron a Egipto a iniciarse en los conocimientos de la geometría.

Tales de Mileto (siglo VII A.C.) fue uno de los sabios, fundador de la escuela "Jónica", se inicia en la filosofía y las ciencias, especialmente en la geometría.

Resolvió algunas dudas como la altura de las pirámides, la igualdad de los ángulos de la base en el triángulo isósceles, que el valor del ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto, y demostró algunos teoremas relativos a la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelas.

Pitágoras de Samos (siglo VI A.C.) fue discípulo de Tales de Mileto, fundó la escuela pitagórica, atribuyéndose el teorema que lleva su nombre y que se enuncia: "*El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos*". Otro de sus teoremas expresa: "*La suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es igual a dos rectos*".

Euclides de Alejandría (siglo IV A.C.) uno de los más distinguidos maestros de la escuela de Alejandría y quién por encargo de Ptolomeo Rey de Egipto, reunió y ordenó los teoremas y demás proporciones geométricas en una obra llamada "Elementos" constituida por 13 libros, por lo cual se le considera el padre de la geometría.

FORMACIÓN DOCENTE · MATEMÁTICA

"Enseñar es asumir la responsabilidad de sostener el conocimiento como un espacio de producción, debates e intercambios".

PATRICIA SADOVSKY
Directora de la colección

Lograr que otros –los jóvenes que asisten a la escuela secundaria– se involucren en un proyecto de estudio *tomando* los modos de pensar y producir conocimiento típicos del quehacer geométrico es una tarea compleja y desafiante a la vez. Discutir algunas ideas que hagan viable una empresa tal es un propósito de este libro.

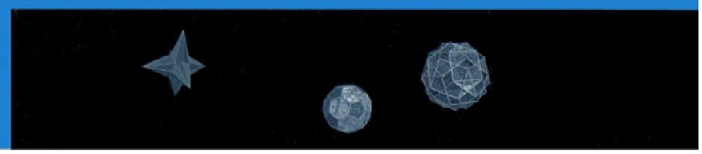
¿Con qué criterios elegir problemas fértiles para que los alumnos comprendan el funcionamiento de la Geometría? ¿Cuáles son las propiedades imprescindibles para "arrancar"? ¿Cómo "entrarán" en la escena del aula? ¿Qué relaciones se pueden plantear entre las construcciones *a la Euclides* y la producción de conocimiento geométrico? ¿Y entre dibujo y discurso? ¿Qué relaciones entre exploraciones y demostraciones? ¿Y entre Álgebra y Geometría?

Este libro invita a pensar los problemas didácticos que plantea la enseñanza de la Geometría cuando la misma sitúa como núcleo fundamental la construcción por parte de los estudiantes de herramientas que les permitan actuar sobre una porción de la realidad a través del sistema conceptual que ofrece una disciplina científica.

libros del
Zorzal

ISBN 987-1081-72-3
9 789871 081721

FORMACIÓN DOCENTE · MATEMÁTICA



Iniciación al estudio didáctico de la Geometría

De las construcciones a las demostraciones

HORACIO ITZCOVICH

libros del
Zorzal

HORACIO ITZCOVICH es argentino, nacido en Buenos Aires en 1964. Es profesor de Matemática egresado de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

Dictó clases en diferentes escuelas secundarias, en el C.B.C. de la UBA y actualmente se desempeña como docente capacitador en CePA-Escuela de Capacitación Docente y es integrante del equipo de Matemática de la Dirección de Currícula de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Es también capacitador en el Proyecto Escuelas del Futuro, Universidad de San Andrés.

HORACIO ITZCOVICH

Iniciación al estudio didáctico de la Geometría

De las construcciones a las demostraciones

libros del
Zorzal

Itzcovich, Horacio
Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones
1a ed. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2005.
128 p.; 21x14 cm. (Formación docente / Matemática. Matemática; 3)
ISBN 987-1081-72-3
1. Geometría-Educación I. Título CDD 516.07

Realizado con el apoyo del Fondo Cultura B.A. de la Secretaría de Cultura del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

Edición
Octavio Kulesz

Revisión
Lucas Bidon-Chanal

Diseño
Verónica Feinmann

ISBN 987-1081-72-3

Libros del Zorzal
Printed in Argentina
Hecho el depósito que previene la ley 11.723

Para sugerencias o comentarios acerca del contenido de *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*, escríbanos a: info@delzorzal.com.ar

www.delzorzal.com.ar

Índice

1
Introducción

Es reconocido por quienes tienen un vínculo con la enseñanza de la matemática, el hecho de que el trabajo geométrico ha ido perdiendo espacio y sentido, tanto en los colegios como en la formación docente.

Los motivos resultan variados y no es la finalidad de este libro profundizar en ellos ni proponer medidas que garanticen un cambio. Pero es probable que entre las razones de esta pérdida se encuentren:

• La dificultad, por parte de los docentes, de encontrar suficientes situaciones o problemas que representen verdaderos desafíos. Es decir, si se trata de pensar en un recorrido que permita a los alumnos iniciarse e involucrarse en el trabajo con las funciones lineales, podríamos imaginar variados problemas, actividades, situaciones, etc. En geometría, en cambio, no es muy claro a qué podríamos llamar "problema".

• En numerosas oportunidades, la enunciación de los contenidos que se presentan en las currículas es poco específica. Hay un predominio de vocabulario y definiciones y pocas veces es claro el sentido que adquieren los conocimientos geométricos.

• Como consecuencia de los comentarios recientemente esbozados y, al ser más reconocido el trabajo en otras ramas de la matemática (aritmética, álgebra, funciones) si algo "se cae" del programa por falta de tiempo es la geometría. Al punto de que nadie dudaría en promover a un alumno de quinto año de EGB a sexto por no conocer la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Si bien no se pretende revertir tal situación a través de estas páginas, se remarca dicho fenómeno con el fin de advertir que si esta tendencia continúa, se priva a los alumnos de la posibilidad de conocer otro modo de pensar, se les quita la oportunidad de vivir la experiencia de involucrarse con otras formas de razonamiento, que son específicas de este dominio. A su vez, la práctica geométrica, tal como la estamos entendiendo –de esto se trata este libro–, tiene un alto valor formativo y es por tal motivo que todos los alumnos tienen derecho a acceder a ella.

No es que se plantea sólo volver a enseñar a los alumnos las definiciones clásicas de la geometría. No se intenta que conozcan únicamente los teoremas más importantes. Se busca promover el vínculo de los jóvenes con un modo cultural diferente. Y este modo de trabajo incluye, entre otras, algunas de las siguientes características:

• Los objetos de la geometría (puntos, figuras, cuerpos, etc.) no pertenecen a un espacio físico real, sino a un espacio teórico, conceptualizado. Esto trae ya un primer problema didáctico: ¿cómo ayudar a los alumnos a comprender que los objetos con los que trabaja la geometría son teóricos y no reales?

• Los dibujos trazados son representantes de esos objetos teóricos. Es decir, la marca que deja un lápiz cuando traza un triángulo no hace más que representarlo. Y es bien conocido que los alumnos asignan a estos dibujos numerosas propiedades o características que no tienen categoría de tales para la geometría, como la posición en la hoja. Incluso, los dibujos son "leídos" por los alumnos de una cierta manera que no siempre es aceptada por la geometría. La pregunta sería entonces: ¿cómo ayudar a los alumnos a despegarse del trabajo meramente perceptivo o visual?

• Muchos problemas geométricos pueden ser, en un comienzo, explorados empíricamente, analizando diferentes dibujos que resultan sumamente útiles (como se verá más adelante) o recurriendo a mediciones. Estas experiencias permiten la obtención de resultados, la formulación de propiedades que, a esta altura del trabajo, adquirirán estatus de conjeturas. ¿Cómo se decide la verdad o falsedad de la conjetura planteada? ¿Cómo se va instalando la idea de que la decisión acerca de la verdad o falsedad de una respuesta, de una nueva relación o de una propiedad no se establece empíricamente, por intermedio de dibujos o de la medición, sino que se apoya en las propiedades de los objetos geométricos? ¿Cómo se van generando condiciones que les permitan a los alumnos ingresar a un trabajo de características deductivas?

• En el trabajo geométrico, los enunciados, relaciones y propiedades son generales, y se establece un dominio de validez, es decir, se explicitan las condiciones a partir de las cuales una colección de objetos (los triángulos *rectángulos*, por ejemplo) cumplen una cierta propiedad o relación. Adquieren un cierto nivel de convencionalidad en la formulación apelando a un vocabulario mínimo necesario para poder socializarlas. En consecuencia, ¿cómo acompañar a los alumnos en la producción de estas generalidades, cuando en numerosas oportunidades el trabajo geométrico se realiza apoyando los razonamientos en dibujos particulares, tratados por quienes saben geometría como casos generales? ¿El vocabulario y la formalidad constituyen una necesidad previa, simultánea o posterior al trabajo geométrico?

Si bien no se dispone de respuestas acabadas para cada uno de los interrogantes, la intención de este libro consiste en proponer y analizar algunas situaciones que favorezcan la entrada de los alumnos en el trabajo geométrico que se detalló anteriormente. Es decir, la preocupación principal gira en torno a cómo generar condiciones que permitan a los alumnos involucrarse en la producción de conocimientos geométricos, no sólo de aquellos que son reconocidos en el sistema educativo con nombre y apellido (Teorema de Pitágoras, Suma de los ángulos interiores del triángulo, etc.) sino también de aquellos referidos al tipo de tarea que se despliega, a esa racionalidad propia del trabajo geométrico, pocas veces explicitada, pocas veces reconocida como parte troncal del "saber geometría" y que podríamos sintetizar con la siguiente frase: "*inferir, a partir de los datos y con el apoyo de las propiedades, relaciones que no están explicitadas y que llevarán a establecer el carácter necesario de los resultados de manera independiente de la experimentación*" [1].

La caracterización del trabajo geométrico detallada anteriormente permite, en cierta medida, comenzar a identificar las particularidades que debería tener una situación

[1] Sadovsky, Parra, Itzcovich y Broitman (1998).

para poder ser designada con el tinte de "problema geométrico". Entre ellas, vale la pena destacar las siguientes [2]:

- *Para resolver el problema se ponen en juego las propiedades de los objetos geométricos.*
- *El problema pone en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al espacio físico sino a un espacio conceptualizado; las figuras-dibujos trazadas por este sujeto no hacen más que representarlo.*
- *La función que cumplen los dibujos en la resolución del problema no es la de permitir arribar a la respuesta por simple constatación sensorial.*
- *La validación de la respuesta dada al problema –es decir, la decisión autónoma del alumno acerca de la verdad o falsedad de su repuesta– no se establece empíricamente, sino que se apoya en las propiedades de los objetos geométricos. Las argumentaciones a partir de las propiedades conocidas de los cuerpos y figuras producen nuevo conocimiento sobre los mismos.*

A partir de estas particularidades propias de un problema geométrico, se han organizado en el desarrollo de este libro diferentes clases de tareas que, por supuesto, no son las únicas que se podrían hacer. Son más bien ejemplos de tipos de actividades que propician vínculos cada vez más próximos al modo de trabajar y de razonar que se pretende desplegar en geometría.

De esta manera, se inicia un análisis del trabajo de construcciones geométricas, partiendo de la premisa de que, bajo ciertas condiciones, las construcciones con los instrumentos clásicos de la geometría permiten explorar, identificar, conjeturar y validar propiedades de las figuras. Arsac (1992)

[2] Barallobres, G., Fioriti, G., Itzcovich, H. y Sessa, C. (2000).

plantea que la práctica geométrica consiste en un ida y vuelta constante entre un texto y un dibujo. En consecuencia, analizar los datos con los que se debe construir una figura, determinar si la construcción es posible o no, establecer relaciones entre los datos conocidos y el dibujo a obtener, etc, resultan una experiencia sumamente útil en el camino hacia entender a una figura como el conjunto de de relaciones que la caracterizan y que pueden ser enunciadas en un texto. Y el dibujo debe ser sólo un representante. En este sentido, la presencia de una figura de análisis comienza a ser un referente importante.

En segundo lugar, se proponen y analizan algunas situaciones que implican un trabajo vinculado a la producción de argumentos deductivos. Es decir, conociendo algunas propiedades, se busca obtener respuestas a preguntas sobre las figuras, como así también poder argumentar sobre las respuestas obtenidas. En ese sentido, la comparación o la determinación de áreas, longitudes, ángulos, ocupan un lugar privilegiado, ya que, como señala Serres (1996), *"la geometría resulta de un ardid, de un sesgo, en el cual la ruta indirecta permite acceder a aquello que no consigue una práctica inmediata"* [3], y se podría agregar que la geometría también se preocupa por explicar los motivos por los cuales el resultado es el obtenido y no otro.

En tercer lugar, se proponen y analizan actividades que favorecen la entrada de los alumnos en un trabajo de una naturaleza diferente. Esto es, se busca establecer condiciones para que una propiedad sea cierta, a partir de otras conocidas. Se pone en el centro de atención una exploración exhaustiva de dominios de validez de ciertos enunciados. Una vez más, las figuras de análisis juegan un papel importante en esta tarea. Pero también se incluye el problema de la búsqueda de razones y argumentos que sostengan la validez de la propiedad estudiada así como argumentos que expliquen el dominio para el cual es válido el enunciado.

[3] Serres, M (1996).

En cuarto término, se incluyen algunos problemas que buscan establecer relaciones entre el trabajo geométrico y el trabajo algebraico. En este punto se prioriza el vínculo entre las construcciones geométricas y los recursos algebraicos que aparecen y son necesarios en función de intentar explicar y dar cuenta de la validez de las construcciones realizadas. A su vez, ciertas expresiones algebraicas ayudan a anticipar las condiciones de los dibujos que se pueden obtener. Esta tarea se diferencia de las relaciones entre álgebra y geometría desde, por ejemplo, el lugar de las ecuaciones o la geometría analítica, que en este punto se han dejado de lado por cuestiones de espacio.

En quinto lugar, se propone una secuencia de trabajo que intenta hacerse cargo de un contenido en particular: las relaciones entre ángulos inscriptos y ángulos centrales. Para ello se recogen aspectos vinculados a los diferentes tipos de tarea propuestos en los puntos anteriores. Esta organización pretende mostrar la posibilidad de conjugar estas diferentes modalidades y ponerlas todas al servicio de un trabajo más organizado, planificado y secuenciado.

Los ejemplos seleccionados en este libro no son exclusivamente integrantes de una categoría o tipo de tarea. Bien podrían algunos de ellos formar parte de dos o más tipos de tareas en simultáneo. Simplemente, para ordenar y explicitar la intencionalidad de cada ejemplo, se lo ha ubicado en el lugar que más posibilidades brinda de desplegar un trabajo cada vez más próximo al planteado anteriormente.