INSTANCIA DE INGRESO

CICLO LECTIVO 2025

ALFABETIZACIÓN ACADÉMICA EN MATEMÁTICA

PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN QUÍMICA

PALABRAS DE BIENVENIDA A LOS/AS INGRESANTES – Ciclo Lectivo 2025

El ingreso al Nivel Superior marca el comienzo de una etapa caracterizada por un elevado grado de madurez y por una participación cada vez mayor en la toma de decisiones. Si en todas las fases de una trayectoria académica el/la estudiante debe asumir el protagonismoactivo de su aprendizaje, en la etapa superior tal posicionamiento resulta insoslayable y sehace extensivo a todos los ámbitos de participación estudiantil.

Asumir una **actitud responsable como estudiante de Nivel Superior** implica tomar conciencia, por un lado, del contexto social, económico y político en el cual se inscribe la vida académica; por otro, de las capacidades y habilidades que pueden ser puestas en juego para construir y transformar dicho contexto. Así, el protagonismo deja de ser una utopía para convertirse en una práctica habitual.

La calidad de la enseñanza, la excelencia académica, la optimización de recursos materialesy humanos, son objetivos cuyo cumplimiento no es patrimonio de quiénes ejercen el gobierno de la Institución Formadora sino un desafío para todos/as los/as que participamosen ella.

El camino que se inicia hoy con la *Instancia de Ingreso* no concluye al recibir el diploma profesional. Estudiar en una Institución de gestión estatal y por lo tanto gratuita respecto de otras, no constituye solamente un privilegio; implica al mismo tiempo un compromiso con la sociedad que lo hace posible. Cada uno/a de nosotros/as puede y debe elegir la manera de retribuir a la comunidad esta inestimable posibilidad de formación.

¡BIENVENIDOS/AS!

Prof. V. Mabel Ramos

Iniciamos este camino juntos, seguramente con muchas expectativas al comenzar esta primera etapa de formación profesional. Te preguntarás: ¿Por qué MATEMÁTICA en el curso introductorio? Porque la Matemática a través del tiempo se ha transformado en la base de sustentación de buena parte del desarrollo científico y tecnológico, alcanzando sus aplicaciones no sólo a la química, física y a la ingeniería sino también a la medicina, a la economía, a las ciencias sociales… Luego si, como expresa el matemático español Miguel de Guzmán: *"el progreso cultural de la sociedad depende en gran parte de esta subcultura que es la matemática*" es importante, tanto para tu desarrollo profesional como para tu integración a la vida social que, desde el comienzo, incorpores algunas componentes de la capacidad matemática:

- Utilices correctamente el lenguaje matemático.
- Comprendas la importancia de los conceptos y propiedades básicas relacionándolas en algún marco teórico.
- Incorpores estrategias para interpretar y resolver problemas.
- Desarrolles una actitud crítica frente a un problema o resultado.

Esperamos que esta propuesta sea de utilidad para ordenar y re significar los conceptos de Matemática, que has estudiado en la escuela media.

Coincidiendo con el Dr. C. Alsina en que: "*el aprendizaje es un viaje y no un destino, en el cual el profesor actúa de guía*" deseamos acompañarte y compartir este viaje formando una sociedad de aprendizaje. Este trabajo es un esfuerzo abierto a comentarios y rectificaciones. Cualquier sugerencia constructiva será considerada y en la medida de lo posible la incorporaremos a futuras actualizaciones del texto.

Prof. Parizia Natalia P

APRENDER CÓMO APRENDER

Orientaciones para estudiar Matemática

Al trabajar en matemáticas desarrollamos muchas habilidades y prácticas que nos posibilitan explicar fenómenos del mundo físico- químico y poder entenderlos. Sin embargo para desarrollar esas la que consideramos será fundamental desarrollar es la de **APRENDER A APRENDER y**a que la misma nos abre la puerta a una educación permanente. Por estas razones queremos compartir algunas ideas que, a nuestro criterio, pueden ayudarte para estudiar y aprender, en particular, Matemática.

Lo fundamental*: tratar de entender.*

Recordemos el siguiente refrán: "Oigo y olvido, veo y recuerdo, hago y entiendo"

¿Cómo se hace? No hay un camino único, es personal, pero… entender significa hacerte preguntas, todas las necesarias hasta que las cosas tengan sentido, no reproduzcas lo que te enseñan.

Saber matemática es saber hacer cosas con lo que vas aprendiendo

Saber hacer significa que adquirís la capacidad de: identificar, interpretar, comparar, relacionar, definir, explicar, inferir, fundamentar, resolver… Por eso cuando estudies debes tener constantemente tu lápiz en acción. Repetir ejemplos, desarrollar los ejercicios que te propongan, inventarte otros,….

Los diferentes objetos matemáticos son herramientas para hacer algo con ello

Es importante que reconozcas los **diferentes objetos matemáticos** (números, ecuaciones, inecuaciones, funciones). ***Investiga*** para qué sirven, cómo y para qué se utilizan, cómo se opera con ellos….

Preguntá las veces que creas necesario.

Es un buen camino para entender, ***quien pregunta aprende***. Pregunta todo, lo que no has entendido y también lo que te parece que entendiste para asegurarte que estás en lo correcto.

¿Memoria? ¿ Si / no ? ¿ Para qué ?

No trates de memorizar nada que no entendiste con total claridad. Observa con detenimiento los pasos que seguiste para desarrollar las demostraciones, resolver los problemas, los ejercicios, …esto es lo más importante para registrar en tu memoria, es decir, el proceso , el camino que recorriste para llegar a los resultados . Tal vez te resultará útil aprender de memoria alguna que otra fórmula sencilla y de uso constante, como también escribir una lista con estas fórmulas para tenerlas a mano en el momento que sea necesario

Revisa con frecuencia lo que vas aprendiendo

Trata de organizar tu tiempo para desarrollar las actividades que se proponen en forma ordenada y no esperes los días previos a las evaluaciones. Recuerda que es necesario un tiempo para elaborar la información que te llega, el aprendizaje es un proceso, no se logra en forma inmediata.

Identifica los conceptos fundamentales del tema y busca las posibles relaciones.

A partir de las relaciones que logres establecer entre los conceptos que vas aprendiendo éstos se van fijando en tus esquemas de conocimientos y de este modo los podrás usar en el momento que sea necesario

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La actividad matemática consiste en gran medida en resolver problemas, lo cual nos lleva a abrir el interrogante de ¿qué es un problema?

Podemos acordar que:

Un problema es una situación matemática o extra matemática que:

- no siempre tiene solución inmediata o tal vez no tiene solución.
- puede admitir varias vías de aproximaciones y tal vez varias soluciones.
- puede demandar algún tiempo hallar su solución.
- exige esfuerzo mental, imaginación y creatividad.

Todos los problemas poseen aspectos comunes, todos tienen un estado inicial y tienden a lograr algún objetivo. Para resolverlos es preciso realizar algunas operaciones sobre el estado inicial para poder lograr el objetivo. La resolución de problemas es un proceso a través del cual se combinan elementos del conocimiento, reglas, técnicas y conceptos previamente adquiridos para dar una solución a la nueva situación.

"*Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si se pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo*" George Polya . "CÓMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS".

Pero entonces**…**

¿Cómo se resuelve un problema?

El proceso de resolución de problemas constituye una unidad, por tanto cualquier fraccionamiento del proceso es artificial. No obstante, a los efectos prácticos puede ayudarte considerar etapas en la resolución A este tipo de estrategias pertenece el modelo propuesto por G. Polya, la resolución del problema dividido en cuatro fases.

FASE 1: Comprender el problema

- Identificar incógnitas, datos, condiciones.
- Dibujar una figura, adoptar una notación adecuada.
- Separar las diferentes partes de las condiciones.

FACE 2: Idear un plan

- Recordar un problema conocido que tenga el mismo tipo de incógnitas pero que sea más sencillo.
- Si no se puede resolver, intentar transformarlo en otro cuya solución resulte conocida.
- Simplificar el problema fijándose en casos especiales.
- Descomponer el problema en partes.

FASE 3: Ejecutar el plan

- Se debe verificar cada paso
- Es una etapa de deducción.

FASE 4: Verificar el resultado

- Tratar de resolver el problema de un modo diferente
- Verificar la solución

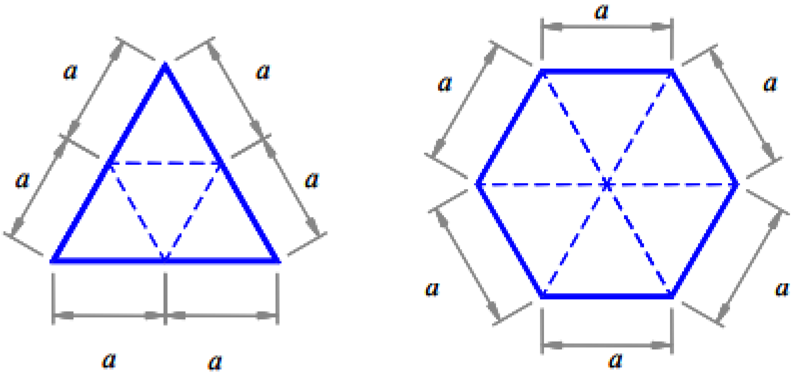
¿Cómo aplicar estas estrategias?

Con los siguientes ejemplos deseamos orientarte en tu camino de plantear y resolver problemas.

EJEMPLO N°1: Un triángulo equilátero de 4 dm^2 de superficie tiene el mismo perímetro que un hexágono regular ¿Cuál es la superficie del hexágono?

Solución:

- Realiza un dibujo



En las condiciones dadas, tomando el triángulo equilátero de lado a como unidad de medida, podemos concluir que:

Si $A_t = 4\ dm^2$ entonces $A_h = 6\ dm^2$

donde A_t Área del triángulo.

A_h Área del hexágono.

☑ **EJEMPLO N°2:** David tiene 24 dulces para repartir y Fernando tiene 18. Si desean regalar los dulces a sus respectivos familiares de modo que todos tengan la misma cantidad y que sea la mayor posible, ¿cuántos dulces repartirán a cada persona? ¿a cuántos familiares regalará dulces cada uno de ellos?

Solución:

- Plantea el problema en términos conocidos: El número de dulces que tienen que dar a cada persona debe dividir a las cantidades de dulces porque deben dar dulces enteros y no a trozos. Es decir, debe ser un divisor común de 24 y de 18.

  Además, como la cantidad debe ser máxima, debe ser el mayor divisor común.

  Descomponemos los números:

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$
$$18 = 2 \cdot 3^2$$

El M.C.D. se calcula multiplicando los factores “comunes al menor exponente”:

$$\boldsymbol{M.C.D.}(24,18) =$$
$$= 2 \cdot 3 =$$
$$= 6$$

Por tanto, cada familiar recibirá 6 dulces.

Como David tiene 24 dulces y dará 6 a cada familiar, los repartirá entre 4 personas (24/6 = 4). Y como Fernando tiene 18 dulces, repartirá entre 3 personas (18/6 = 3).

Para reflexionar…

“Lo más importante no es el fin del camino sino el camino. Quien baja demasiado rápido se pierde la esencia del viaje” Louis L ´Amour.

NOTACIÓN MATEMÁTICA

El propósito de este apartado es recordarte la notación matemática que utilizaremos en el desarrollo de los temas que componen este cuadernillo.

Teoría de conjuntos

Sea x un elemento, A y B conjuntos:

	Notación	Se lee
Pertenencia	$x \in A$	x pertenece a A
	$x \notin A$	x no pertenece a A.
Inclusión	$A \subset B$	A está incluido en B
	$A \subseteq B$	A está incluido o es igual a B
Unión	$A \cup B$	A unión B
Intersección	$A \cap B$	A intersección B

Expresiones

	Notación	Se lee
Igualdad	$x = y$	x es igual a y
Menor que	$x < y$	x es menor que y
Mayor que	$x > y$	x mayor que y
Aproximado	$x \approx y$	x es aproximadamente igual a y

	Notación	Se lee
Cuantificador universal	$\forall$ x	Para todo x
Cuantificador existencial	$\exists$ x	Existe x Existe por lo menos (un) x
Tal que	x / y x : y	x tal que y
Por lo tanto	$x \therefore y$	x por lo tanto y

COMENCEMOS A TRABAJAR…

MÓDULO I: LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS Y SUS OPERACIONES

• Conjuntos numéricos: N, Z, Q, I y R. Operaciones y propiedades en R. Identidades.

MÓDULO II: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

• Uso de las letras en el álgebra y planteo de problemas con lenguaje simbólico. Polinomios. Operaciones con polinomios. Ecuaciones lineales y cuadráticas.

MÓDULO III: GEOMETRÍA

• Geometría. Resolución de problemas sobre cálculo de perímetro y área.

MÓDULO IV: TRIGONOMETRÍA

• Teorema de Pitágoras. Funciones trigonométricas de números reales: seno, coseno, tangente. Valores de las funciones trigonométricas.

OBJETIVOS

Al finalizar el curso habrás desarrollado la capacidad de:

• Reconocer y utilizar los números reales, comprendiendo las propiedades que los definen y las formas alternativas de representación de sus elementos, seleccionándolas en función de la situación problemática a resolver.

• Resolver problemas con ecuaciones, de una incógnita, utilizando métodos analíticos y gráficos.

• Reconocer el uso de las funciones para modelizar fenómenos del mundo real

• Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados.

• Valorar el lenguaje matemático para modelizar situaciones de la vida diaria

MÓDULO I: LOS CONJUNTOS NUMÉRICOS Y SUS OPERACIONES

Aún en las etapas más primitivas de la evolución humana se ha desarrollado en el hombre el sentido del número y la capacidad de contar. Esta habilidad le ha permitido reconocer lo que cambia en un conjunto de elementos, por ejemplo, si se ha extraído o añadido algún objeto.

¿Cómo pudo un hombre, hace 5000 años, saber que en su rebaño no faltaba ninguna de sus 41 ovejas, si ni siquiera sabía contar hasta 10? Una simple solución es la siguiente: llevaba consigo tantas piedritas como ovejas, y al terminar la jornada guardaba por cada oveja una piedrita en su bolsa; si sobraba alguna piedrita sabía que debía buscar una oveja. Establecía una correspondencia biunívoca entre dos conjuntos de objetos.

Mucho tiempo después, los romanos usaron también piedritas para hacer sus cálculos; la palabra ”cálculo” significa etimológicamente piedra, y de ahí el origen de la palabra calcular. La actividad de contar y la necesidad de simplificar la tarea de hacer cálculos, implicó la necesidad de utilizar símbolos escritos para representar lo que se había contado. Fue así que surgieron los distintos sistemas de numeración. A través de la historia se han usado distintos sistemas, y en cada uno de ellos cada número se representa como una combinación de símbolos. En algunos casos los símbolos representan cantidades y una combinación de símbolos representa la suma de estas cantidades; estos sistemas emplean una descomposición aditiva.

En otros casos, como el sistema decimal actual, importa la ubicación del símbolo en la representación del número. Por ejemplo, 21 significa veintiuno, mientras que 12 significa doce. Estos sistemas se llaman posicionales.

Algunas culturas usaron una base de 20 símbolos, otros de 60, pero el sistema de numeración que ha predominado y es el que actualmente usamos tiene base 10, y por eso se llama decimal. Eso significa que podemos escribir números arbitrariamente grandes con tan sólo diez símbolos: 0, 1, 2, ..., 9. Así es como el número 10 ha dejado sus marcas en nuestra forma de contar y en las palabras para nombrar los números. Así por ejemplo, ”dieciséis” está compuesto por las palabras ”diez” y ”seis”, ”treinta” hace alusión a ”tres” veces 10. Los números que se usan para contar se llaman números naturales: 1,2, 3, ... Fueron los primeros números que aparecieron en la historia de la Matemática. Más adelante surgió la necesidad de agregar el 0 como una forma de representar lo que no hay, los números negativos para poder resolver todas las restas, las fracciones para resolver los cocientes, también los números irracionales y los imaginarios. De esta manera quedaron definidos distintos conjuntos numéricos: los naturales, los enteros, los racionales, los reales y los complejos. Haremos en este capítulo un recorrido por los distintos conjuntos numéricos, justificando brevemente la necesidad de construir cada uno de ellos.

LOS NÚMEROS NATURALES

Los números que se usan para contar se llaman números naturales. Al conjunto formado por todos los números naturales se lo denota con la letra N. Para contar un elemento se usa el número 1, para el siguiente el número 2, y así sucesivamente. A cada número natural le sigue otro natural que se obtiene agregando 1 al anterior. Así aparece la operación de sumar. Sumar 1 es nombrar al siguiente número natural. Por ejemplo, el siguiente del 5 es el 6, y por eso 6 = 5 + 1. De esta manera y según este orden, los primeros naturales son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

La operación de suma se extiende a todos los naturales. Así por ejemplo, como 2 = 1 + 1, entonces 5 + 2 es el “siguiente del siguiente de 5”, es decir que 5 + 2 = 7. Para indicar que un número está antes que otro se usa el signo < 5 se lee “2 es menor que 5”, e indica que 2 está antes que el 5. Del mismo modo, el símbolo > se utiliza para indicar que un número está después que otro y se lee “mayor que”. La suma repetida de un mismo número se llama multiplicación, o también usaremos el término producto. Así, sumar 5 veces 8 es multiplicar 5 por 8, y coincidentemente, es lo mismo que sumar 8 veces 5. Esto es :

$$8+8+8+8+8=5\cdot 8 \quad \text{y además}$$

$$\underbrace{8+8+8+8+8}_{5 \text{ veces}}=\underbrace{5+5+5+5+5+5+5+5}_{8 \text{ veces}}.$$

Así como la multiplicación por un natural es una suma iterada de términos iguales, se conviene en representar la multiplicación iterada como una potencia:

$$8\cdot 8\cdot 8\cdot 8=8^4.$$

En este caso, 8 se llama la base y 4 el exponente. El exponente indica el número de veces que se multiplica a la base por sí misma.

La resta entre dos números, por ejemplo, 10 y 2, es el número que hay que sumarle a 2 para obtener 10. Se

denota con el signo −. Decimos entonces que 10−2 = 8 porque 8 + 2 = 10.

ᏳᏰ NÚMEROS ENTEROS

Ahora consideremos el siguiente problema: Hallar el número que sumado a 5 sea igual a 3.

Este problema no tiene solución en el conjunto de los números naturales, ya que si sumamos un natural a 5 obtendremos otro natural mayor que 5, y 3 es menor que 5. Este problema es análogo a querer calcular la resta $3-5$. Es decir, ninguna resta en la que el sustraendo sea mayor o igual que el minuendo puede ser resuelta en el conjunto de los naturales. La introducción de los números enteros negativos y el cero sirvió para resolver este tipo de problemas. En primer lugar, el 0 es el número que sumado a cualquier natural da el mismo natural:

$$3 + 0 = 3, \quad 125 + 0 = 125.$$

Así queda definida la suma de un natural con el 0 y la resta entre dos naturales iguales:

$$3-3 = 0, \quad 125-125 = 0$$

Además, para cada natural consideramos el opuesto como el número que sumado a él da 0. Así por ejemplo, el número que sumado a 1 da como resultado 0 se lo denota -1 y es el opuesto al número natural 1. El opuesto de 2 es -2, el de 3 es -3 y así sucesivamente. Todos los opuestos de los números naturales se denominan enteros negativos, y a los naturales se los denomina enteros positivos. Así, los enteros negativos, los positivos y el cero dan lugar al conjunto de los Números Enteros. Además, así como -3 es el opuesto de 3, también decimos que 3 es el opuesto de -3, y que el 0 es el opuesto de sí mismo. Las operaciones de suma y de multiplicación se extienden a este nuevo conjunto, y la resta queda bien definida entre cualquier par de números enteros. En efecto, la resta entre dos números enteros se define como la suma de un número y el opuesto del otro:

$$1-4 = 1 + (-4) = -3, \quad -7-15 = -7+ (-15) = -22$$

Si bien la resta es una operación cerrada en el conjunto de los enteros, en el sentido que la resta de dos enteros es nuevamente un entero, no cumple con las propiedades asociativa ni conmutativa. Estas propiedades se van a presentar con detalle en la sección de números reales. Al conjunto de los números enteros se lo representa con la letra Z. Así como en los naturales existe un orden natural: $1 < 2$, $2 < 3$, $3 < 4$, etc, en los enteros también hay un orden compatible con el de los naturales o desde una perspectiva más amplia para los números reales, que serán presentados más adelante. Los enteros conforman una sucesión infinita de números, donde cada elemento tiene un sucesor que se obtiene sumando 1 al número, y un antecesor, que se obtiene restándole 1. Por ejemplo, -7 es el antecesor de -6 pues $-6-1 = -7$, y -5 es el sucesor de -6 pues $-6+1 = -5$. La siguiente es una lista ordenada de algunos enteros:

$$\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots.$$

En el conjunto de los números enteros están definidas entonces las operaciones de suma y de multiplicación, y satisfacen las mismas propiedades que se satisfacen para los números naturales. También la potencia de un número con exponente natural se define como la multiplicación iterada del número tantas veces como lo indique el exponente. Por ejemplo: $(-5)3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125$. Las potencias con exponente negativo no están definidas para los enteros, excepto para 1 y -1. En el conjunto de los números enteros, destacamos dos elementos que cumplen ciertas propiedades especiales: el 0 y el 1.

Propiedades del número 0:

- Elemento neutro para la suma: Si lo sumamos con cualquier número se obtiene el mismo número. Por ejemplo: $7 + 0 = 7$, $-4 + 0 = -4$.
- Multiplicación por 0: La multiplicación por cero siempre da como resultado cero. Por ejemplo: $6 \cdot 0 = 0$, $(-3) \cdot 0 = 0$.
- Potencia con exponente 0: Se conviene definir la potencia de un número no nulo con exponente cero, igual a 1. Por ejemplo: $7^0 = 1$ y $(-5)^0 = 1$.

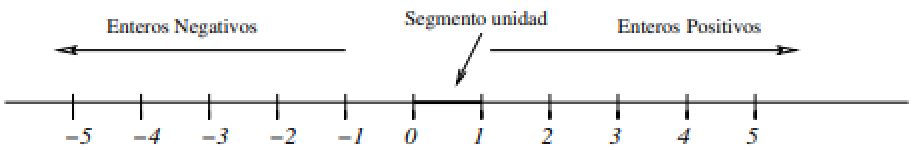
Propiedades del número 1:

- Elemento neutro para la multiplicación: Si se lo multiplica por cualquier número se obtiene el mismo número; por ejemplo: $4 \cdot 1 = 4$, $(-9) \cdot 1 = -9$ y $0 \cdot 1 = 0$.

Más adelante, en las clases de álgebra del primer año, se verá que esto implica la siguiente regla general:

> **Regla de los signos:** La multiplicación entre dos enteros negativos o dos enteros positivos es un entero positivo. La multiplicación entre un entero positivo y uno negativo es un entero negativo.

Los números enteros suelen representarse como puntos de una recta. Esto es, se eligen dos puntos distintos, uno representa el 0 y el otro el 1. Así se tiene un segmento unidad. Transportando este segmento hacia un lado de la recta se representan todos los enteros positivos, y hacia el otro todos los enteros negativos. Claramente, existen muchos puntos de la recta que no se corresponden con ningún entero. La Figura es una representación de algunos números enteros:



Valor absoluto

El valor absoluto de un entero positivo o cero es el mismo número, y el valor absoluto de un entero negativo es su opuesto. Se denota encerrando el número entre barras. Por ejemplo: $|3| = 3$, $|-4| = 4$ y $|0| = 0$.

La división entera

Hemos dicho que si se efectúan sumas, restas y multiplicaciones de números enteros se obtienen números enteros, por lo que se dice que este conjunto es cerrado respecto a estas operaciones. Existe otra operación en el conjunto de los números enteros llamada la división entera. La división entera es una operación que sólo tiene sentido en el conjunto de los números enteros y también en el de los naturales si le agregamos el 0. La división entera entre dos números, llamados dividendo y divisor, permite hallar otros dos números enteros, llamados cociente y resto. El resto es un entero no negativo y menor que el valor absoluto del divisor, y tal que si se le suma el producto entre el divisor y el cociente se obtiene el dividendo.

Por ejemplo, la división entre 27 y 6 tiene como cociente 4 y como resto 3 pues

$$27 = 6 \cdot \mathbf{4} + \mathbf{3}$$

También, si dividimos −124 por −50, entonces el cociente es 3 y el resto es 26 dado que

$$-124 = (-50) \cdot 3 + 26$$

o si dividimos 1500 por 125 el cociente es 12 y el resto es 0 puesto que $1500 = 125 \cdot 12 + 0$

Si el resto de la división es 0 se dice que el divisor divide al dividendo, o que el dividendo es divisible por el divisor o que el dividendo es múltiplo del divisor. Por ejemplo, 8 es divisible por 4, o bien, 4 es divisor de 8, u 8 es múltiplo de 4 puesto que $8 = 4 \cdot 2 + \mathbf{0}$.

Ahora bien, notemos que si bien el cociente entre 27 y 6 es 4, no es cierto que 4·6 sea igual a 27. Por lo tanto la división entera no es la operación inversa a la multiplicación. Así como con los naturales no podemos resolver el problema de hallar el número que sumado a 5 dé como resultado 3, en el conjunto de los números enteros no es posible resolver problemas tal como hallar el número que multiplicado por 6 sea igual a 27. Para solucionar este problema se introduce un nuevo conjunto numérico en la siguiente sección.

NÚMEROS RACIONALES

Siempre que medimos algo, longitudes, capacidad, volumen, áreas, tiempo, etc., utilizamos una unidad de medida. Así es que medimos cuántas veces cabe nuestra unidad en aquello que queremos medir. Pero sea cual fuera esta unidad, no siempre ésta cabe una cantidad entera de veces, y debemos fraccionarla. Es así como surgieron históricamente las fracciones. Siglos más tarde, a estas fracciones se les dio una categoría de números, ya que sirvieron para resolver problemas numéricos como por ejemplo:

Hallar el número que multiplicado por 5 dé como resultado 2.

La solución de dicho problema es la fracción $\frac{2}{5}$, y se lee "dos quintos". Las fracciones se representan como cocientes entre dos enteros, llamados numerador y denominador respectivamente, siendo el denominador distinto de 0. Por ejemplo

$$\frac{7}{3}, \qquad \frac{-2}{8}, \qquad \frac{0}{-5}, \qquad \frac{3}{3}.$$

Toda fracción multiplicada por su denominador es igual al numerador. Por ejemplo, la fracción $\frac{2}{5}$ multiplicada por 5 es igual a 2:

$$5 \cdot \mathbf{\frac{2}{5}} = 2. \qquad (2.1)$$

Si multiplicamos la ecuación (2.1) en ambos miembros por 2, obtenemos

$$10 \cdot \mathbf{\frac{2}{5}} = 4.$$

Pero la fracción $\frac{4}{10}$ cumple la misma propiedad:

$$10 \cdot \mathbf{\frac{4}{10}} = 4.$$

Notemos entonces que las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{10}$ representan ambas al número que multiplicado por 10 es igual a 4. Esto sugiere que las fracciones.

$$\frac{2}{5} \quad y \quad \frac{4}{10}$$

resuelven ambas un mismo problema. Es por ello que se dice que estas fracciones son equivalentes. Las fracciones irreducibles son aquellas cuyo numerador y denominador no son ambos divisibles por un mismo entero, excepto 1 y −1. Estas fracciones tienen la propiedad que toda fracción equivalente a ella se obtiene multiplicando el numerador y el denominador por un mismo entero no nulo. Por ejemplo, $\frac{-10}{9}$ es una fracción irreducible, y algunas de sus fracciones equivalentes son:

$$\frac{10}{-9}, \qquad \frac{-20}{18}, \qquad \frac{-30}{27},$$

Los números racionales se construyen a partir de los números fraccionarios, considerando a todas las fracciones equivalentes como un solo número. Por ejemplo, las fracciones $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ son distintas, pero todas representan el mismo número racional. Así, como números racionales, tenemos que

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

Al conjunto de los números racionales se lo denota con la letra Q e incluye al conjunto de números enteros, y por lo tanto a los números naturales. En efecto, cada número entero está representado por una fracción con denominador 1, o una equivalente. Por ejemplo, 2 es el número racional representado por la fracción $\frac{2}{1}$ o $\frac{4}{2}$, o cualquiera de sus equivalentes.

Los números racionales suelen expresarse en notación decimal, por ejemplo,

$$\frac{5}{10} = 0,5.$$

Aquellas fracciones que son equivalentes a una fracción con denominador 1, 10, 100 u otra potencia de 10 tienen una expresión decimal finita, y se denominan fracciones decimales. Por ejemplo, $\frac{7}{25}$ es equivalente a $\frac{28}{100}$, por lo tanto es una fracción decimal y se expresa en notación decimal como 0,28. Si no son equivalentes a una expresión con denominador que sea potencia de 10 tienen una expresión decimal infinita periódica. Esto significa que en la parte decimal existe una secuencia de uno o más números que se repite indefinidamente. A dicha secuencia se la denomina período. Por ejemplo, $\frac{3}{9}$ se expresa como 0,333..., y su período es 3. Para denotar el período se lo suele marcar con un arco ⌒ sobre él.

Así tenemos los siguientes ejemplos de números racionales y su representación decimal:

$$\frac{6}{100} = 0,06; \qquad \frac{6}{9} = 0,6666\ldots = 0,\overset{\frown}{6}\,; \qquad \frac{3549}{990} = 3,58484\ldots = 3,5\,\overset{\frown}{84}\ .$$

Una observación es que todas las fracciones decimales también tienen una representación decimal infinita periódica. Por ejemplo, 1 = 0, $\hat{9}$ ya que

$$1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 0,\widehat{3} = 0,\widehat{9}\ .$$

La importancia de la notación decimal es que todas las fracciones equivalentes tienen una misma representación decimal finita, o infinita periódica. Así por ejemplo,

$$\frac{7}{4}, \qquad \frac{14}{8}, \qquad \frac{35}{20}, \qquad \frac{175}{100}$$

son fracciones equivalentes, y todas con la misma representación decimal finita 1,75. También,

$$\frac{14}{6}, \qquad \frac{21}{9} \qquad \frac{35}{15},$$

se representan en notación decimal con $2,\widehat{3}$.

Operaciones entre racionales

La suma y la resta de dos fracciones con el mismo denominador es otra fracción con el mismo denominador y cuyo numerador es la suma (la resta respectivamente) de los numeradores. Por ejemplo,

$$\frac{2}{3} - \frac{7}{3} = \frac{2-7}{3} = \frac{-5}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = \frac{2+7}{3} = \frac{9}{3}.$$

En particular, tenemos que

$$\frac{2}{3} + \frac{-2}{3} = \frac{0}{3} = 0,$$

por ello decimos que $\frac{-2}{3}$ es el racional opuesto a $\frac{2}{3}$, y escribimos

$$\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Si los denominadores son distintos el problema de sumar y restar fracciones se reduce a buscar dos fracciones del mismo denominador equivalentes a las dos fracciones dadas, por lo que la metodología se reduce a transformar las fracciones a común denominador. Por ejemplo, para sumar $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, buscamos un denominador que sea múltiplo de 2 y de 3, como puede ser el 6:

$$\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6}, \qquad \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6}.$$

Entonces

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}.$$

En este caso el denominador se obtuvo como la multiplicación de los denominadores, pero es suficiente encontrar un denominador que sea múltiplo común de los denominadores. Así, para restar $\frac{7}{12}$y $\frac{8}{15}$, observamos que 60 es múltiplo de 12 y 15. Entonces

$$\frac{7}{12}-\frac{8}{15}=\frac{7\cdot 5}{12\cdot 5}-\frac{8\cdot 4}{15\cdot 4}=\frac{35}{60}-\frac{32}{60}=\frac{35-32}{60}=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}.$$

La multiplicación entre dos racionales se obtiene multiplicando numeradores entre sí y denominadores entre sí. Por ejemplo,

$$\frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{2\cdot(-4)}{7\cdot 3}=-\frac{8}{21}.$$

Observemos que las siguientes multiplicaciones tienen como resultado el número 1:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{6}=1,\qquad \frac{-5}{2}\cdot\frac{-2}{5}=\frac{10}{10}=1.$$

Un número racional es el ***inverso*** de otro si la multiplicación entre ambos es igual a 1.

Con la introducción de los números racionales se amplía la definición de potenciación con exponentes enteros negativos. Se define la potencia de un número racional con exponente negativo como igual a la potencia del inverso con el exponente cambiado de signo. Por ejemplo:

$$2^{-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3},\qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}=\left(\frac{2}{3}\right)^{5}.$$

La división de un número racional por otro debe entenderse como la multiplicación del primero por el inverso del segundo. Por ejemplo, la división del número racional 3 por la fracción $\frac{5}{4}$ consiste en multiplicar 3 por $\frac{4}{5}$.

La operación de división se simboliza con dos puntos : o también con la línea de fracción:

$$3:\frac{5}{4}=\frac{12}{5};\qquad \text{o también}\qquad \frac{3}{\left(\frac{5}{4}\right)}=\frac{12}{5}.$$

La representación de los números racionales en notación decimal simplifica notablemente el cálculo en las operaciones, ya que se opera de manera similar a las operaciones entre enteros, teniendo siempre en cuenta la posición de la coma decimal. Por otro lado, también simplifica la comparación entre dos números racionales. Por ejemplo, no es obvio a simple vista cuál de los siguientes racionales es mayor: $\frac{15}{8}$ o $\frac{17}{10}$. Sin embargo, si los escribimos en notación decimal es sencillo notar que 1,875 (igual a quince octavos) es mayor que 1,7.

Representación de los números racionales en la recta

Los números racionales también pueden representarse en la recta. Las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, que son partes de una unidad, se representan precisamente fraccionando el segmento unidad en tantas partes como indica el denominador. La fracción $\frac{3}{2}$se representa como 3 veces $\frac{1}{2}$. Es muy importante notar que si dos fracciones son equivalentes se representan por un mismo punto en la recta.

Entre dos números enteros existe sólo un número finito de números enteros. Por ejemplo, entre 5 y −4 hay sólo 8 números enteros; ¿pero cuántos números racionales hay? La respuesta es: ¡infinitos! Lo mismo ocurre para cualquier par de números racionales distintos que tomemos. Para ver esto basta tomar el promedio entre ambos y al resultado promediarlo con alguno de ellos, repitiendo el proceso indefinidamente. Por ejemplo, tomemos el 0 y el 2. Ambos son números racionales. Su promedio es el número que está entre ambos y equidista de los dos, y es igual a la semisuma de los dos números: $\frac{0+2}{2} = 1$ El número 1 está entre 0 y 2 y es racional. Calculemos ahora el promedio entre 1 y 0: $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$. Nuevamente obtenemos un número racional; y repitiendo este proceso obtenemos una sucesión infinita de números racionales distintos, todos entre 0 y 2:

$$\frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{0+\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8}, \quad \frac{0+\frac{1}{8}}{2} = \frac{1}{16}, \quad \frac{0+\frac{1}{16}}{2} = \frac{1}{32} \cdots$$

Significa esto que si representamos todos los números racionales en una recta, ¿habremos ”llenado” toda la recta? Veremos que no es así, que cualquiera sea el segmento unidad que usemos, siempre quedarán puntos en la recta que no se corresponden con ningún número racional.

NÚMEROS IRRACIONALES

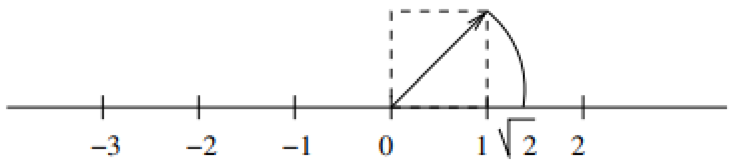
Si pudiéramos marcar sobre la recta numérica todos los puntos correspondientes a los números racionales advertiríamos que quedarían aún infinitos puntos sin marcar. Es decir, una vez elegido un segmento unidad, existen puntos de la recta que no se corresponden con ningún número racional. Dos problemas sencillos:

determinar la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado igual a uno, y determinar la longitud de una circunferencia de radio uno, revelaron la existencia de magnitudes que no tenían lugar dentro del conjunto de números racionales. Como sabemos aplicando el Teorema de Pitágoras, la diagonal de un cuadrado de lado 1 es un número x tal que

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Sin embargo no existe ningún número racional que cumpla la propiedad que elevado al cuadrado sea igual a 2. Esto significa que si tomamos al lado del cuadrado como unidad de medida, no es posible fraccionarlo de tal manera que estas fracciones de unidad entren un número entero de veces en la diagonal. Sin embargo, es la medida de un segmento y por lo tanto puede pensarse como un número. Este número se llama raíz cuadrada de 2 y se lo denota $\sqrt{2}$ Más aún, $\sqrt{2}$ es comparable con los números racionales, en el sentido que se puede determinar qué números racionales son menores y cuáles mayores que él.

La Figura 2.3 muestra la correspondencia entre $\sqrt{2}$ y un punto de la recta: el arco de circunferencia indica que la medida de la diagonal se corresponde con el número $\sqrt{2}$



Los números irracionales tienen también una representación decimal, y esta expresión decimal es infinita no periódica. Por ejemplo, un número cuya parte decimal está formada por infinitos ceros y unos, en el cual el primer 0 está seguido de un 1, el segundo 0 de dos unos, el tercero de tres unos, y así sucesivamente:

235,01 011 0111 01111 011111 0111111 01111111 ...

representa un número irracional porque no puede identificarse un ”período” en la parte decimal del mismo. Si bien parecería poco frecuente estos tipos de números, los mismos constituyen, como dijimos, un conjunto infinito. Algunos de los números irracionales que se utilizan con frecuencia son **π:** razón entre la medida de la circunferencia y su diámetro, **e**: número de Neper y base del logaritmo natural y **M:** logaritmo en base 10 del número **e**. Los primeros 15 dígitos decimales de estos números se listan a continuación:

$$\pi = 3,141592653589793\ldots$$

$$e = 2,718281828459045\ldots$$

$$M = \log_{10}(e) = 0,434294481903252\ldots$$

NÚMEROS REALES

El conjunto de los números reales se simboliza con R y está formado por todos los números racionales e irracionales. Este conjunto está en biyección con los puntos de una recta. Esto significa que si consideramos una recta, entonces es posible hacer corresponder a cada número real un punto de la recta, y a cada punto de la recta un único número real. Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división son cerradas en los reales. Además todo número real distinto de cero tiene un inverso. El inverso de un número racional distinto de 0 es un número racional, y el inverso de un número irracional es un número irracional.

Potenciación y radicación

La potencia de un número real con exponente entero se define de la misma manera que para los números racionales. Notemos que las potencias con base no nula y exponente par son siempre positivas, por ejemplo:

$$(-3)^2 = 9, \qquad (-2)^4 = 16, \qquad 3^4 = 81.$$

En particular, cualquier número y su opuesto elevados a un exponente par dan el mismo resultado. Por lo tanto, si queremos hallar el número que elevado al cuadrado sea igual a 16 tendremos dos soluciones: 4 y −4. Para distinguir entre ellas, utilizaremos una notación diferente para cada una. Esto es, escribiremos

$$\sqrt{16} = 4, \qquad \text{y} \qquad -\sqrt{16} = -4.$$

En general, para cualquier número positivo a, definiremos la raíz cuadrada positiva de a como el número positivo b tal que b 2 = a, y lo denotaremos b = $\sqrt{a}$

$$b = \sqrt{a} \qquad \text{si } b \text{ es positivo y } b^2 = a.$$

De manera análoga definimos la raíz cuarta positiva, raíz sexta positiva, y demás raíces con índice par. Así por ejemplo,

$$\sqrt[4]{81} = 3, \qquad -\sqrt[6]{64} = -2, \qquad \sqrt{100} = 10.$$

Por otro lado, las raíces de índice impar están definidas para todos los números reales, y tienen el mismo signo que el radicando. Por lo tanto no es necesario hacer la distinción entre la raíz positiva y la negativa. Así por ejemplo

$$\sqrt[3]{64} = 4, \qquad \text{y} \qquad \sqrt[3]{-64} = -4.$$

Para denotar la radicación con índice natural también se utiliza la notación con exponente fraccionario:

$$\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}}, \qquad \sqrt[3]{12} = 12^{\frac{1}{3}},$$

y de esta manera se puede extender la definición de potenciación de un número real positivo con cualquier exponente racional:

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}, \qquad 12^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{12}\right)^2}.$$

Además, es posible definir la potenciación de un número real positivo con cualquier exponente real, tema que excede a los objetivos de este curso. La potenciación con base real negativa no siempre da como resultado un número real, y sólo se puede dar una definición general en el campo de los números complejos. Conjunto numérico el cual será introducido más adelante. Es importante notar que la potenciación y la radicación no son distributivas con respecto a la suma y la resta. Por ejemplo

$$(3+5)^2 = 64 \text{ y } 3^2 + 5^2 = 34 \text{ por lo cual } (3+5)^2 \neq 3^2 + 5^2.$$
$$(3-5)^2 = 4 \text{ y } 3^2 - 5^2 = -16 \text{ por lo que } (3-5)^2 \neq 3^2 - 5^2.$$

La siguiente propiedad es conocida como diferencia de cuadrados: La diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto entre la diferencia y la suma de estos números.

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b).$$

Esta propiedad surge fácilmente aplicando la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma y a la resta, y suele ser muy útil a la hora de realizar ciertos cálculos. Así por ejemplo,

$$(3^2 - 5^2) = (3-5)(3+5).$$

Para estos números no hay mayor dificultad entre resolver la diferencia de los cuadrados $3^2 – 5^2$ =9 – 25 o la multiplicación entre la diferencia y la suma de los números (3-5).(3+5)= (-2).8

Pero si se desea calcular $821^2 - 820^2$ entonces es más sencillo resolver (821−820)(821 + 820) = 1641 que calcular la diferencia entre los cuadrados de 821 y 820.

Listamos a continuación algunas propiedades de las operaciones en los números reales:

Propiedad conmutativa. Intercambiar el orden de los números en una suma o en una multiplicación no afecta el resultado.

$$5 + 6 = 6 + 5 = 11 \text{ y } 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = 6$$

Propiedad asociativa. El orden en que se agrupan los términos de una suma o los factores en una multiplicación no altera el resultado.

$$2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4 = 9,\ 2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 24$$

Propiedad distributiva. La multiplicación es distributiva con respecto a la suma y a la resta, en tanto que la potencia es distributiva con respecto al producto y la división.

$$(2+1)\cdot 3 = 2\cdot 3 + 1\cdot 3 \qquad (2-1)\cdot 3 = 2\cdot 3 - 1\cdot 3,$$

$$(3\cdot 4)^2 = 3^2\cdot 4^2, \qquad (6:2)^3 = 6^3 : 2^3.$$

Propiedad de las potencias. El producto y el cociente de potencias de igual base es igual a otra potencia de la misma base, siendo los exponentes iguales a la suma y a la diferencia de los exponentes, respectivamente.

$$2^3\cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7, \qquad 4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2.$$

Propiedad de las raíces. La radicación es distributiva respecto del producto y el cociente.

$$\sqrt[3]{27\cdot 64} = \sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{64}, \qquad \sqrt[4]{81:16} = \sqrt[4]{81} : \sqrt[4]{16}.$$

Recalcamos que cada propiedad se satisface además en los otros conjuntos numéricos, siempre que tengan sentido en el mismo. Por ejemplo:

$$\sqrt{2\cdot 18} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{18},$$

es cierta en el conjunto de los números reales, pero no lo es en el conjunto de los racionales, puesto que ni √ 2 ni √ 18 son racionales.

Entendiendo las propiedades anteriormente mencionadas en símbolos…

Propiedad	Adición	Multiplicación
Ley de Cierre	$\forall a,b \in R \rightarrow a+b \in R$	$\forall a,b \in R \rightarrow a.b \in R$
Ley Uniforme	$\forall a,b,c \in R \;\; y \;\; a=b$ $\Rightarrow a+c=b+c$	$\forall a,b,c \in R \;\; y \;\; a=b$ $\Rightarrow a.c=b.c$
Ley Asociativa	$\forall a,b,c \in R$ $\Rightarrow (a+b)+c=a+(b+c)$	$\forall a,b,c \in R$ $\Rightarrow (a.b)c=a(b.c)$
Ley Conmutativa	$\forall a,b \in R$ $\Rightarrow a+b=b+a$	$\forall a,b \in R$ $\Rightarrow a.b=b.a$
Elemento neutro	$\exists\ 0 \in R \;\; /$ $a+0=0+a=a \quad \forall a \in R$	$\exists\ 1 \in R \;\; /$ $a.1=1.a=a \quad \forall a \in R$
Inverso	$\forall\ a \in R \quad \exists\ b \in R \;\; /$ $a+b=b+a=0 \quad (b=-a)$	$\forall\ a \in R, a \neq 0 \quad \exists\ b \in R \;\; /$ $a.b=b.a=1 \quad (b=a^{-1})$
Distributiva de la multiplicación respecto a la adición	$a(b+c)=a.b+a.c \quad \forall a,b,c \in R$	

POTENCIACIÓN

DEFINICIÓN

Sea $a \in R,\ n \in N$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\ veces}$$

$$a^0 = 1 \ si \ a \neq 0$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \quad si \ a \neq 0$$

PROPIEDADES

Sean $n, m \in Z$

- $(a.b)^n = a^n b^n$
- $a^n a^m = a^{n+m}$
- $a^n : a^m = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n.m}$

Recordamos algunas identidades de uso frecuente en cálculos numéricos y algebraicos

- $a(b+c) = ab + ac$ (Propiedad distributiva).
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (Cuadrado de un binomio).
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (Cuadrado de un binomio).
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (Cubo de un binomio).
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ (Diferencia de cuadrados).

RADICACIÓN

DEFINICIÓN

$\sqrt[n]{a}=b$ *si y sólo si* $a = b^n$, *con* $n\in N$

$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

- *Si a>0,* $\sqrt[n]{a}\ \exists\, en\, R\ \forall\ n \in N$

  ☞ $\sqrt{7}$; $\sqrt[4]{21}$; $\sqrt[5]{0{,}789}$

- *Si a<0;.* $\sqrt[n]{a}\ \exists\, en\, R$ <u>solo si n es impar</u>

  ☞ $\sqrt[3]{-8}=-2$; $\sqrt{-8}$ *no tiene solución en R*

PROPIEDADES

Sean $a,b\in R$; $n,m,p\in N$

- $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$
- $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a/b}$ si $b\neq 0$
- $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

REALES (R)

- **RACIONALES (Q)**
  - **FRACCIONARIOS (F)**
    - $0;\ 13;\ \frac{3}{4};\ -\frac{7}{8};\ \frac{1}{2};$
  - **ENTEROS (Z)**
    - **NATURALES (N)**
      - $4;\ \frac{25}{5};\ \sqrt{100}$;...
    - **ENTEROS NEGATIVOS Y CERO**
      - $0;\ -13;\ -\frac{16}{4};\ -\frac{12}{3}$;...
- **IRRACIONALES (I)**
  - $\sqrt{2};\ -\sqrt{3};\ \pi$;......

EJERCICIOS

1_ Ordena de menor a mayor, e indica a qué conjunto numérico pertenece cada número:

a) $\frac{1}{4}$	**b)** 10^{-1}	**c)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$	**d)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$
e) 2π	**f)** e^{2}	**g)** $\sqrt{25}$	**h)** $-\frac{5}{6}$
i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	**j)** $-\frac{27}{18}$	**k)** $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$	**l)** $\sqrt[3]{-32}$

2_ Si es posible, ubica cada elemento del siguiente conjunto en la categoría que corresponda:

$$\left\{0\,;-10\,;50\,;-\pi\,;0{,}532\,;\sqrt{7}\,;1{,}2\overset{\frown}{3}\,;\frac{22}{7}\,;\frac{2}{3}\right\}$$

a) Enteros no naturales.

b) Naturales no enteros.

c) Racionales no enteros.

d) Reales no racionales.

e) Irracionales no reales.

3_ Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta:

a) $\sqrt{3}$ es un número irracional pero 2 $\sqrt{3}$ no lo es.

b) Todo número natural es racional.

c) $\sqrt{2}$ es un número irracional pero no real.

d) El único número racional mayor que 2,1 y menor que 2,3 es 2,2.

e) Todo número real es racional.

f) $\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}.\sqrt{45}\cdot$ son números irracionales.

4_En busca de conclusiones.

a) Escribí un número racional mayor que 1.

b) Escribí un número racional mayor que 1, pero menor que el anterior.

c) Escribí más números racionales, cada vez menores, pero siempre mayores que la unidad.

d) Trata de hallar el menor número racional que sea mayor que la unidad.

e) ¿Qué conclusión obtienes?

5_ Realizar los siguientes cálculos:

a) $(5+2\cdot(-4))^2:(-3)-(5\cdot(-4)+(-6))=$

b) $3-(-4+\dfrac{5}{2})=$

c) $\dfrac{-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{2}{5}\right)}{-3}=$

i) $-\dfrac{1}{6}+\dfrac{20}{7}\cdot\left(-\dfrac{14}{5}\right)-\dfrac{\dfrac{16}{15}}{-\dfrac{2}{5}}=$

j) $-\dfrac{4}{\dfrac{1}{5}+6}-\dfrac{-\dfrac{1}{31}+1}{-\dfrac{1}{2}}=$

d) $\dfrac{-\frac{2}{3}+\frac{5}{2}}{-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}}=$

e) $\dfrac{\dfrac{2}{7}+\dfrac{1}{13}\left(-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{2}\right)}{(-2)\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}}=$

f) $\dfrac{-2}{\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)}-\dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\left(-3+\dfrac{4}{3}\right)}{-\dfrac{1}{6}}=$

g) $\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{5}-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{3}\right)\right)=$

h) $\left(2+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{6}{5}\right)\cdot\dfrac{1}{18}-2\cdot\dfrac{1}{6}=$

k) $(3^{-2}+2^{-1})=$

l) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}}=$

m) $\left(\dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}+1}{1-\dfrac{2}{3-\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{1}{3}}=$

n) $\left(\dfrac{1-\frac{5}{4}}{\sqrt[3]{-\dfrac{11}{8}-2}}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}}\right)^{-1}=$

6_ Determinar, sin hacer la división de numerador por denominador, cuáles de los siguientes números racionales tienen una representación decimal finita y cuáles no.

$$\frac{37}{5};\quad \frac{19}{3};\quad \frac{57}{6};\quad \frac{270}{75};\quad \frac{28}{700};\quad \frac{17}{4}.$$

7_ Indicar si las siguientes igualdades son correctas. Para las incorrectas escribir a qué número es igual el miembro izquierdo de la igualdad.

a) $\sqrt{25+4}=\sqrt{25}+\sqrt{4}$

b) $(3+8)^2=3^2+8^2$

c) $\sqrt{(-4)^2}=-4$

d) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{6}{9}=\dfrac{3+6}{4+9}$

e) $\sqrt{81\cdot 4}=\sqrt{81}\cdot\sqrt{4}$

f) $\sqrt[5]{(-8)^5}=-8$

g) $\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}$

h) $\dfrac{8}{6}\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{8}{9}$

i) $\left(-\dfrac{4}{6}\right)^3=\dfrac{(-4)^3}{(-6)^3}$

j) $\sqrt{\dfrac{25}{81}}=\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{81}}$

k) $2^4\cdot 3^4=6^{16}$

l) $15^{-2}:5^{-2}=3^{-2}$

m) $(-8)^0=-1$

n) $\pi^0=1$

ñ) $2^3=3^2$

8_ Resolver sin utilizar calculadora:

a) $27^{\frac{2}{3}} =$ c) $8^{\frac{2}{3}} =$ e) $32^{0.4} =$

b) $49^{\frac{3}{2}} =$ d) $(0,125)^{-\frac{1}{3}} =$ f) $32^{-\frac{3}{5}} =$

9_ Resuelve (Sugerencia: aplica propiedades cuando sea posible)

a) $\left(-4-2^{0}\right)^{2} =$ **b)** $\left(-4\right)^{-2} =$

c) $\left(\frac{2}{7}\right)^{0} =$ **d)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{2} =$

e) $\sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}} =$ **f)** $\frac{a^{2} \cdot (b \cdot c)^{2}}{(a \cdot b)^{3}} =$

g) $3^{x} \cdot 3^{x} \cdot 3^{x} \cdot 3^{x} =$ **h)** $\left[\left(a^{5}.a^{-2}\right)^{-1}.\left(a^{5}:a^{2}\right)^{-1}\right]^{3} =$

i) $\sqrt{\frac{9}{\sqrt[3]{64}}} =$ **j)** $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}}{27}}$

k) $\frac{\sqrt{\sqrt[3]{27} \cdot 3}}{\sqrt[4]{2^{6}} \cdot \sqrt{2}} =$ **l)** $\sqrt[6]{x^{4}} \cdot \sqrt[9]{x^{6}} \cdot \sqrt[15]{x^{10}} =$

m) $\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} =$ **n)** $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} =$

MÓDULO II: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

La importancia relevante del Álgebra es poder, a través de ella, escribir simbólicamente una determinada situación problemática mediante ecuaciones, desigualdades u otras expresiones matemáticas. También permite la generalización de un determinado tipo de problemas o situaciones haciendo uso de “letras” que representan números. En este punto es conveniente diferenciar desde el principio que existen distintos usos de las letras en el álgebra. En algunos casos representan un número desconocido o incógnita que se desea averiguar. En otros casos representan constantes del problema, las cuales no cambian en la situación planteada. También están las llamadas variables o indeterminadas, que como su nombre lo indica, adoptan distintos valores. En general en una misma situación aparecen dos o más variables y éstas están vinculadas por alguna relación. En otros casos las letras se utilizan para generalizar números, representando entonces a todo un rango numérico. En este capítulo presentaremos algunos ejemplos a modo de ilustrar el uso de las letras en el álgebra. En particular nos referiremos a su uso para la generalización de fórmulas y propiedades numéricas, como representación de incógnitas en ecuaciones, y en polinomios en una variable.

Estos no son los únicos usos que se dan a las letras en el álgebra, también pueden representar parámetros, nombres de funciones, vectores, puntos, y muchos más. Más aún, algunos números particulares tienen una representación acordada de manera universal una letra reservada para ellos, como es el caso de algunos números irracionales: π y e. En este capítulo analizaremos algunas situaciones problemáticas y para cada una de ellas plantearemos una expresión algebraica que la represente. Una expresión algebraica es aquella en la que aparecen letras y números ligados con las operaciones numéricas usuales. Algunos ejemplos son:

$$a^3 - 5x = 2, \qquad \Delta = b^2 - 4ac, \qquad a + b, \qquad x^2 \leq y,$$

$$3\sqrt{x} - 2, \qquad x^3 + 30, \qquad 81\left(\sqrt[3]{x}\right)^4 + x.$$

Usualmente, para representar constantes o datos se utilizan las primeras letras del abecedario o del alfabeto griego (a, b, c, ..., o α,β, γ,...) , mientras que para representar variables o incógnitas suelen usarse las últimas letras (x, y, z, w, ...). No obstante recalcamos que la elección de las letras no siempre es esa.

GENERALIZACIÓN DE FÓRMULAS Y PROPIEDADES NUMÉRICAS

Para expresar simbólicamente la suma entre los números 5 y 3, escribimos la fórmula 5 + 3. Para representar que esta suma es conmutativa, escribimos 5+ 3 = 3+ 5. Ahora bien, para indicar que la suma es conmutativa cualquiera sean los números que intervengan en la operación, resulta materialmente imposible explicitarlo para cada par de números en particular. Entonces podemos utilizar letras, a y b por ejemplo, para simbolizar los números y escribir:

a + b = b + a, para cualquier par de números a, b.

En esta expresión algebraica a y b representan números, no necesariamente distintos aunque las letras sean distintas. No son incógnitas, puesto que no nos interesa conocer el valor de a ni de b, simplemente nos sirven para generalizar una fórmula, a+b, y una cierta propiedad numérica que se cumple para los números reales. Otros ejemplos similares sirven para indicar la propiedad asociativa del producto: a · (b · c) = (a · b)· c, a, b, c números reales.

Otros enunciados pueden involucrar letras y números en particular. Por ejemplo, decimos que 5 es el siguiente o sucesor de 4 porque 5 = 4 + 1, y para enunciarlo de una forma general decimos que si **n** es un número natural entonces **n** + 1 es su **sucesor**. A su vez, para indicar la suma de un número con su sucesor escribimos **n** + (**n**+ 1).

Observemos que si utilizamos una letra a para representar cualquier número real, entonces a podría asumir un valor positivo, negativo o 0. Así por ejemplo, 2a+ 1 puede representar 2·100+ 1 o 2·(−32)+ 1. Por otra parte, la expresión −a simboliza al opuesto de a. Entonces si damos a a el valor −3, entonces −a representa al número 3.

INCÓGNITAS Y ECUACIONES

Las incógnitas de un problema son aquellos valores que interesan ser conocidos y no están explícitamente dados en el problema.

Ejemplo 1: Hallar el número que elevado al cubo es igual a 27.

En este problema existe una única incógnita, y tiene la propiedad de que su cubo es 27. Aún cuando es inmediato darse cuenta que se trata del número 3, este número no está dado en el problema explícitamente y por ello es una incógnita. Para plantear algebraicamente el problema simbolizamos con una letra a la incógnita, por ejemplo, x. Entonces x tiene la siguiente propiedad:

$$x^3 = 27$$

Ejemplo 2. El área de un cuadrado menos el doble de lo que mide el lado es igual a 3. ¿Cuánto mide el lado?

Este problema aparenta tener dos incógnitas: el área del cuadrado y la longitud del lado. Pero debemos recordar de la geometría que el área de un cuadrado es igual a la longitud del lado elevada al cuadrado. Así, si denotamos con x a la longitud del lado nuestro problema se plantea algebraicamente de la siguiente manera:

$$x^2 - 2 \cdot x = 3$$

Las expresiones surgidas de los ejemplos anteriores: $x^3 = 27$, y $x^2 - 2x = 3$, no son identidades que se cumplen para todo valor de x sino que sólo son ciertas para algunos valores de x, o quizás para ninguno. La presencia del signo = no indica que las expresiones a cada lado sean iguales. Por el contrario, se pretende hallar los valores de las incógnitas que hagan cierta dicha identidad, y este tipo de igualdades se denominan ecuaciones.

> Una *ecuación* es una igualdad entre expresiones algebraicas que involucra una o más incógnitas. Los valores de las incógnitas que verifican la igualdad son las *soluciones* de la ecuación.

Así tenemos que 3 es una solución de la ecuación del primer ejemplo, mientras que 3 y −1 son soluciones de la ecuación del segundo ejemplo. Pero ¡atención!, sólo 3 es solución del segundo problema, porque −1 es negativo y no puede ser la medida del lado de un cuadrado. Esto es importante, al resolver la expresión algebraica, debemos asegurarnos que estas soluciones tengan sentido en nuestro problema.

En algunos casos la ecuación puede involucrar letras que no son incógnitas sino que generalizan números. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - ax = 0, \qquad a \text{ un número real cualquiera,}$$

representa en realidad una familia de ecuaciones, una para cada valor de a. Vemos en este caso que a y 0 son soluciones de la ecuación. Esto significa que si tomamos un valor de a específico, por ejemplo a = 5, entonces

$$x^2 - 5x = 0$$

tiene dos soluciones: 5 y 0. Pero para un valor diferente de a, por ejemplo a = −2, las soluciones de x 2+2x = 0 son −2 y 0.

DESPEJAR INCÓGNITAS

Con cierta frecuencia nos encontramos con el problema de tener que obtener el valor de una determinada incógnita, la cual se encuentra combinada con números y/o constantes en una misma ecuación. Por ejemplo, queremos determinar la incógnita x en la ecuación

$$2n + x = \sqrt[5]{x-7},$$

siendo n una constante del problema.

No siempre es sencillo determinar la incógnita. De hecho, no existe ninguna receta o procedimiento estándar que permita despejar la incógnita en cualquier ecuación. Los pasos a seguir dependerán de la estructura y de las operaciones algebraicas involucradas. Por ejemplo, las ecuaciones

$$\frac{1}{x+2} = 3 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{x} + 2 = 3$$

involucran los mismos números, letras y operaciones, pero la estructura en la que aparecen son distintas, y por lo tanto el procedimiento para despejar la incógnita será diferente. En todos los casos, la manera de determinar el valor de la incógnita es realizar distintas operaciones en ambos miembros de la ecuación respetando la propiedad uniforme de la igualdad, hasta obtener una ecuación en la que la incógnita aparezca “sola” en uno de los miembros y no aparezca en el otro miembro. En este punto diremos que hemos despejado la incógnita.

Propiedad uniforme: Si a ambos miembros de una igualdad se les suma o se los multiplica por un mismo número, la igualdad se mantiene.

Al aplicar la propiedad uniforme es frecuente decir que llevamos o pasamos un término de un miembro al otro. Debemos recordar siempre que la acción de pasar de miembro en una ecuación es un resultado de aplicar la propiedad uniforme de la igualdad. Por ejemplo, es frecuente cometer errores como el siguiente. En la ecuación

$$\frac{1}{x+2} = 3$$

x ”está sumando”, y por lo tanto ”pasa restando”, resultando la ecuación

$$\frac{1}{2} = 3 - x.$$

Eso no es correcto, ya que si restamos x en el segundo miembro debimos restar x en el primero. Pero:

$$\frac{1}{x+2} - x \neq \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto no se trata de tener en cuenta la operación en la que está directamente involucrada la incógnita, sino de la estructura y las prioridades de las operaciones que aparecen en el miembro de la ecuación correspondiente. Una forma de no equivocarse en el procedimiento de despejar la incógnita es analizar la expresión de afuera hacia dentro, como en ”cáscaras de cebollas”. Así, en el miembro izquierdo de la ecuación (2.5) la operación principal es una división, y la incógnita aparece en el divisor. Entonces es conveniente multiplicar por el divisor en ambos miembros:

$$\frac{1}{x+2} \cdot (x+2) = 3 \cdot (x+2).$$

De este modo resulta la ecuación 1 = 3 ·(x+ 2), o bien 1 = 3x+ 6. Ahora x está afectada a una multiplicación. Sin embargo la operación fundamental en el miembro en que figura x es la suma. Restamos en ambos miembros el término 6 y obtenemos −5 = 3x, y dividiendo ambos miembros por 3 llegamos a la solución

$$x = -\frac{5}{3}.$$

POLINOMIOS

Las expresiones algebraicas formadas por el producto entre un número real y una potencia de una letra x con Exponente natural o cero se denominan monomios en x. El número real que multiplica a la potencia de x es el coeficiente del monomio y la letra es la indeterminada. Por ejemplo, $3x^5$, $-x^7$ son monomios en x, mientras que $3z^5$, z^7 son monomios en z. Para simplificar la notación en esta sección trabajaremos sólo con monomios en la indeterminada x

Un número real es un monomio en el cual la indeterminada x tiene exponente 0:

$$3 = 3\,x^0,$$

en particular, si el coeficiente es 0 el monomio resulta 0:

$$0x^2 = 0, \qquad 0x^7 = 0.$$

Las potencias de x también son monomios, con coeficiente 1:

$$x^7 = 1x^7.$$

Llamaremos grado de un monomio al exponente de x, a excepción del monomio 0 al cual no le asignaremos grado.

- $3x^7$ es un monomio de grado 7.
- $2x$ tiene grado 1.
- 8 tiene grado 0.
- 0 no tiene grado.

La multiplicación o producto de dos monomios es otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y el grado es la suma de los grados. Por ejemplo

$$3x^7 \cdot 4x^3 = (3 \cdot 4)x^{7+3} = 12x^{10}.$$

El cociente entre dos monomios es otro monomio siempre que el grado del monomio divisor sea menor o igual al grado del otro monomio. En ese caso, el cociente es un monomio cuyo coeficiente es el cociente entre los coeficientes, y el grado es la diferencia entre los grados. Por ejemplo:

$$\frac{7x^5}{4x^3} = \frac{7}{4}x^{5-3} = \frac{7}{4}x^2, \qquad \frac{12x^5}{3x^5} = \frac{12}{3}x^{5-5} = 4.$$

Si sumamos dos monomios del mismo grado cuyos coeficientes no son opuestos, obtenemos otro monomio de ese mismo grado cuyo coeficiente es la suma de los coeficientes:

$$3x^7 + 5x^7 = (3+5)x^7 = 8x^7,$$

Mientras que

$$3x^7 + (-3)x^7 = 0.$$

Del mismo modo, si restamos dos monomios distintos del mismo grado obtenemos otro monomio de ese mismo grado cuyo coeficiente es la resta de los coeficientes:

$$4x^4 - 5x^4 = (4-5)x^4 = -x^4.$$

Pero si sumamos o restamos dos monomios de distinto grado, el resultado no es un monomio. Por ejemplo

$$x^2 + 5x$$

no puede ser expresado como un monomio en x. A este tipo de expresiones se las denomina polinomios.

Un polinomio es una expresión algebraica que resulta de la suma de uno o más monomios de distinto grado.

Las siguientes expresiones son ejemplos de polinomios en la indeterminada x:

$$x^5 - 2x^3 + 8, \qquad 3 + 7x^2, \qquad 5x^6.$$

Para denotar a los polinomios en la indeterminada x usaremos notaciones como P(x), Q(x), R(x), etc. Llamaremos grado de un polinomio P(x) al mayor de los grados de los monomios que lo componen, y lo denotaremos gr(P(x)). Por ejemplo,

- Si $P(x) = 2x^5 - 2x^3 + 8$, entonces $\text{gr}(P(x)) = 5$ porque el monomio de mayor grado es $2x^5$.
- Si $Q(x) = 7 - 3x^{15} + 12x^2$, entonces $\text{gr}(Q(x)) = 15$ porque el monomio de mayor grado es $-3x^{15}$.

Igual que para los monomios, no le asignaremos grado al polinomio 0. En un polinomio no nulo, se denomina coeficiente principal al coeficiente del término de mayor grado. Por ejemplo, −3 es el coeficiente principal del polinomio $Q(x) = 7-3x^{15} + 12x^2$

En el conjunto de los polinomios sí es posible definir las operaciones de suma, resta, multiplicación y división en el sentido que el resultado de estas operaciones entre polinomios es también un polinomio.

Operaciones entre polinomios

La suma de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene sumando los monomios del mismo grado.

Por ejemplo, para sumar

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 8x \qquad \text{y} \qquad Q(x) = 3x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$$

sumamos agrupando los monomios del mismo grado:

$$P(x)+Q(x) = (x^4+3x^4)+(-2x^3+x^3)+(0x^2-3x^2)+(8x+x)+(0+2) =$$
$$= 4x^4-x^3-3x^2+9x+2$$

La resta de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene restando los monomios del mismo grado.

Si P(x) y Q(x) son como antes, entonces

$$P(x)-Q(x) = (x^4-3x^4)+(-2x^3-x^3)+(0x^2-(-3x^2))+(8x-x)+(0-2)$$
$$= -2x^4-3x^3+3x^2+7x-2.$$

Ejemplo: Dar la suma entre los siguientes polinomios:

$$P(x) = 3-2x+7x^2+9x^3, \qquad Q(x) = 3-2x+7x^2-9x^3.$$

Notemos que en este caso, como los coeficientes principales de sendos polinomios son 9 y −9 respectivamente, esto hace que los monomios correspondientes se cancelen en la suma, y que el polinomio resultante tenga grado menor que 3. Entonces:

$$P(x)+Q(x) = (3+3)+(-2x-2x)+(7x^2+7x^2)+(9x^3-9x^3) = 6-4x+14x^2.$$

La multiplicación de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene multiplicando todos los monomios de uno por todos los monomios del otro.

Esto no es una regla arbitraria sino que resulta de aplicar la propiedad de distributividad de la multiplicación respecto de la suma. Por ejemplo, tomemos P(x) = $2+x^2$ y Q(x) = $3+x+x^3$. Entonces

$$\begin{aligned} P(x)\cdot Q(x) &= (2+x^2)\cdot(3+x+x^3) \\ &= 2\cdot(3+x+x^3)+x^2\cdot(3+x+x^3) \\ &= 2\cdot 3+2\cdot x+2\cdot x^3+x^2\cdot 3+x^2\cdot x+x^2\cdot x^3 \end{aligned}$$

Resolviendo las multiplicaciones entre monomios y sumando los del mismo grado resulta

$$P(x)\cdot Q(x) = 6+2x+3x^2+3x^3+x^5.$$

Notemos que el grado de la multiplicación de dos polinomios es siempre la suma de los grados de los dos polinomios, a menos que uno de los dos sea el polinomio nulo. La operación de división entre polinomios es análoga en cierto modo a la división de números naturales. Esto es, cuando dividimos dos naturales, por ejemplo 26 y 3, decimos que el cociente entre ambos es 8 y el resto es 2. Esto significa que

$$26 = 3\cdot 8+2.$$

El resto tiene la propiedad de ser un número natural o cero y menor que el divisor

Dados dos polinomios $P(x)$ y $D(x)$, siempre existen dos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ llamados cociente y resto respectivamente, con la propiedad que

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

y tales que, el polinomio resto $R(x)$ es el polinomio nulo ó es un polinomio de grado menor que el grado del polinomio divisor $D(x)$.

Para calcular el cociente y el resto de la división entre dos polinomios existe un algoritmo muy similar al usado en la división entera. Si el polinomio divisor tiene grado mayor que el dividendo, entonces el cociente es el polinomio 0 y el resto es igual al dividendo. Por ejemplo, si

$$P(x) = x^2 - 3, \qquad \text{y} \qquad D(x) = x^3 + x - 4,$$

Entonces

$$Q(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad R(x) = x^2 - 3.$$

$$\underbrace{x^2 - 3}_{P(x)} = \underbrace{(x^3 + x - 4)}_{D(x)} \cdot \underbrace{0}_{Q(x)} + \underbrace{(x^2 - 3)}_{R(x)}.$$

Recordemos que algo similar ocurre con el cociente entre números naturales. Si el dividendo es menor que el divisor, por ejemplo, 3 dividido 8, entonces el cociente es 0 y el resto es 3. Ahora, si el grado de P(x) es mayor o igual que el del divisor D(x), entonces el cociente no será el polinomio nulo. Tomemos como ejemplo

$$P(x) = 2x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x - 2, \qquad D(x) = 2x^2 - x + 1.$$

En primer lugar se dividen los monomios de mayor grado de ambos polinomios. En este caso, $2x^4$ y $2x^2$. Como

$$2x^4 = \boxed{x^2} \cdot 2x^2,$$

escribimos x^2 en el cociente. Multiplicamos D(x) por x 2 , y restamos el polinomio resultante a P(x).

$$\begin{array}{rl}
2x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x - 2 & \underline{\left| \; 2x^2 - x + 1 \right.} \\
-\quad \underline{2x^4 - x^3 + x^2 \qquad\qquad\quad} & \qquad \mathbf{x^2} \\
6x^2 - 2x - 2 &
\end{array}$$

Como el polinomio $6x^2 - 2x - 2$ es de grado 2 y 2 no es menor que el grado del polinomio D(x), seguimos dividiendo. Ahora los monomios de mayor grado son $6x^2$ y $2x^2$. Como $6x^2 = 2x^2 \cdot \mathbf{3}$, sumamos 3 al cociente, multiplicamos por 3 al divisor y restamos el polinomio resultante a $6x^2 - 2x - 2$

$$\begin{array}{rl} 2x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x - 2 & \left|\underline{\,2x^2 - x + 1\,}\right. \\ -\quad 2x^4 - x^3 + x^2 \qquad\qquad & \boxed{x^2+3} \longleftarrow \text{Cociente} \\ \hline 6x^2 - 2x - 2 & \\ -\quad 6x^2 - 3x + 3 & \\ \hline \boxed{x-5} \longleftarrow \text{Resto} & \end{array}$$

Ahora x−5 es de grado menor que D(x), y por lo tanto Q(x) = $x^2 + 3$ es el cociente de la división y R(x) = x−5 es el resto. Esto significa que

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x),$$

Es decir

$$\underbrace{2x^4 - x^3 + 7x^2 - 2x - 2}_{P(x)} = \underbrace{(2x^2 - x + 1)}_{D(x)}\underbrace{(x^2 + 3)}_{Q(x)} + \underbrace{x - 5}_{R(x)}.$$

Si en una división entre polinomios P(x) y Q(x) el resto de la división es 0 entonces resulta

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x),$$

es decir, P(x) se escribe como producto de dos polinomios. En ese caso decimos que hemos factorizado al polinomio P(x). Por ejemplo, si dividimos P(x) = $x^4 - x^2$ por D(x) = $x^2 - 1$, el resto de la división es 0 y concluimos que P(x) se puede factorizar como producto de dos polinomios

$$x^4 - x^2 = (x^2 - 1) \cdot x^2.$$

Podemos aún factorizar x^2 y $x^2 - 1$ y escribir entonces a P(x) como $x^4 - x^2 = x \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x+1)$

Valor numérico de un polinomio

En un polinomio, la letra x representa una variable o indeterminada. Si a esa variable la reemplazamos por un número real, por ejemplo 5, decimos que hemos evaluado o determinado el valor numérico del polinomio en 5.

Ejemplo: Calcular el valor numérico del polinomio P(x) = $x^3 - x + 2$, en a = 5 y en a = 3.

$$P(5) = 5^3 - 5 + 2 = 125 - 5 + 2 = 122.$$

$$P(3) = 3^3 - 3 + 2 = 27 - 3 + 2 = 26.$$

Por otro lado, si hacemos las cuentas correspondientes, veremos que al dividir P(x) por x − 5 obtenemos como resto 122, y si dividimos P(x) por x − 3 el resto es 26, que justamente son los números P(5) y P(3) respectivamente o lo que es equivalente, el valor numérico de P en x = 5 y el valor numérico de P en x = 3. Esto se debe a que

$$P(x) = (x-5)\cdot Q(x) + R(x),$$

Luego

$$P(5) = (5-5)\cdot Q(5) + R(5) = R(5).$$

Esto nos dice que P(5) = R(5), y como R(x) es un número entonces no depende de x, y por lo tanto

$$R(x) = R(5) = 122.$$

Este último resultado se llama Teorema del Resto y se enuncia así:

> **Teorema del Resto**: Sea a un número y $P(x)$ un polinomio.
> La evaluación o valor numérico de $P(x)$ en $x = a$,
> es igual al resto de dividir a $P(x)$ por el polinomio $D(x) = x - a$

Si P(a) = 0, o equivalentemente, si el resto de la división del polinomio P(x) por x−a es 0, decimos que a es una raíz del polinomio P(x).

Ejemplo: Si consideramos el polinomio $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$, vemos que P (1) = 1 + 1−1 + 1−2 = 0

Por lo tanto 1 es raíz del polinomio P(x). Significa que podemos escribir P(x) = (x−1).Q(x). Para hallar Q(x) dividimos P(x) por x−1, y así obtenemos la factorización

$$P(x) = (x-1)(x^3 + 2x^2 + x + 2).$$

Nuevamente, podemos ver ahora que P(−2) = 0, ya que −2 anula el polinomio $Q(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$. Significa que podemos escribir P(x) = (x − 1)(x + 2)S(x), donde S(x) se obtiene de la división de Q(x) por x+ 2. Así llegamos a

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x^2+1).$$

ECUACIONES LINEALES

Una ecuación es una expresión algebraica que involucra una igualdad entre dos expresiones algebraicas, donde una o más letras son las llamadas incógnitas. Esto significa que la ecuación no es una identidad cierta para todos los valores de la incógnita sino para algunos, o quizás para ninguno. Por ejemplo, si escribimos:

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

esto no es propiamente una ecuación pues la identidad se cumple cualquiera sea el valor de a. En cambio, si escribimos

$$(a+1)^2 = 9,$$

esta igualdad se cumple sólo si a = 2 o si a = −4. Es una ecuación con una incógnita. Las ecuaciones

$$2x - y = 3, \qquad 3x + y = 2z, \qquad t = 2u,$$

tienen la propiedad de que las incógnitas x, y, z y u aparecen sin estar afectadas por una potencia, radicación, ni multiplicadas unas con otras, ni en un denominador. Se dice que estas ecuaciones son **lineales** en cada una de esas incógnitas. Por ejemplo, 2x−y = 3 es lineal en x y en y, y t = 2u es lineal en **t** y en **u**.

En algunas ecuaciones podría estar involucrada una letra que no es una incógnita sino que representa una constante. Por ejemplo, la ecuación

$$ax + 3 = 5,$$

donde a representa un número real cualquiera y x es la incógnita. También en este caso diremos que la ecuación es lineal en x. En cambio, las siguientes no son ecuaciones lineales en las incógnitas x, y y z:

$$2\sqrt{x} + 3x = 8, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 9, \qquad 3xy + 2 = z.$$

Esto es porque en el primer caso, la incógnita x aparece afectada por una raíz. En el segundo caso, las variables están elevadas al cuadrado, y en el tercer caso las incógnitas x e y aparecen multiplicadas entre sí. En esta sección estudiaremos ecuaciones lineales en una y dos incógnitas.

Las ecuaciones lineales con una incógnita son aquéllas que pueden escribirse de la forma

$$ax + b = c,$$

donde a, b y c son números reales, $a \neq 0$ y x es la incógnita.

Resolver una ecuación lineal ax +b = c significa encontrar la solución de la ecuación, es decir, el valor de x para el cual la ecuación es cierta. Por ejemplo, 4 no es solución de 3x+ 2 = 20, pues

$$3 \cdot \mathbf{4} + 2 = 14 \neq 20$$

En cambio 6 sí es solución pues $3 \cdot 6 + 2 = 20$

Dos ecuaciones lineales con una incógnita son equivalentes si tienen la misma solución. Por ejemplo,

$$3x + 2 = 20 \qquad 7x - 4 = 38$$

son ecuaciones equivalentes pues ambas tienen solución x = 6. Las siguientes operaciones transforman una ecuación en otra equivalente:

- Multiplicar o dividir ambos miembros de la ecuación por un número distinto de cero,
- sumar o restar a ambos miembros de la ecuación un número cualquiera.

Por ejemplo, si tenemos la ecuación $2x + 3 = 7$

y multiplicamos por 3 ambos miembros, obtenemos $6x + 9 = 21$

y si le restamos 7 a cada miembro resulta $2x - 4 = 0$

Notemos que las tres ecuaciones tienen la misma solución x = 2, por lo que son equivalentes.

Para resolver una ecuación lineal, lo que debemos hacer es aplicar a ambos miembros de la ecuación distintas operaciones que la transformen en una ecuación equivalente donde de un lado de la igualdad aparezca la incógnita y del otro un número que será la solución buscada. De ese modo habremos *despejado* la incógnita.

Ejemplo Despejar la incógnita y resolver la ecuación lineal 5x+ 4 = 19.

Restamos a ambos miembros 4 y obtenemos la ecuación equivalente

$$5x = 15.$$

Ahora dividimos ambas por 5 y obtenemos la solución: $x = 3$.

En efecto, $5 \cdot 3 + 4 = 19$. También podríamos haber dividido primero por 5 y luego haber restado $\frac{4}{5}$en ambos miembros. La solución es la misma:

$$x + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}, \qquad x = \frac{19-4}{5} = \frac{15}{5} = \mathbf{3}.$$

Es importante verificar que el valor obtenido satisface la ecuación porque un error en los cálculos puede conducirnos a una solución incorrecta.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Hemos estudiado cómo resolver ecuaciones lineales, que son aquellas que podemos escribir de la forma

$$\mathbf{a.x + b = 0.}$$

Si el coeficiente a es distinto de 0, entonces este tipo de ecuaciones tiene una única solución, $x = -\frac{b}{a}$.

En los casos en que una ecuación involucre hasta potencias de orden 2 de la incógnita, se dice que es una ecuación de segundo grado. Por ejemplo

$$2x^2 - 3 = x, \quad \text{o} \quad x^2 - 4x = -4$$

Recordemos que un número x_0 es solución de la ecuación si al reemplazar a la incógnita por el número obtenemos una igualdad. A diferencia de las ecuaciones lineales, no todas las ecuaciones de segundo grado tienen una solución real pero sí es posible resolverla en el conjunto de los números complejos. A su vez, puede ocurrir que tengan una única solución o que tengan dos soluciones diferentes

Una *ecuación de segundo grado* es una ecuación que se puede escribir de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

siendo x la incógnita, y a, b y c números reales, $a \neq 0$.

Damos a continuación algunos ejemplos de resolución de ecuaciones de segundo grado.

Ejemplo1: Resolver la ecuación $2x^2 - 5 = 0$.

Aquí se trata simplemente de despejar x^2,

$$x^2 = \frac{5}{2}$$

y determinar los valores de x que satisfacen la ecuación:

$$x = \sqrt{\frac{5}{2}}, \qquad \text{y} \qquad x = -\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Ejemplo 2. Resolver la ecuación $2x^2 + 4x + 2 = 0$.

Observemos que si extraemos el factor común 2, resulta ser el cuadrado de un binomio:

$$2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2(x+1)^2,$$

por lo que debemos resolver la ecuación

$$2(x+1)^2 = 0.$$

Esa ecuación tiene como única solución el valor $x = -1$

Ejemplo 3. Resolver la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$

En este caso no se trata de extraer una raíz cuadrada como en el Ejemplo 1, ni tampoco consiste en el cuadrado de un binomio como en el *Ejemplo 2*. Sin embargo, podemos operar algebraicamente para obtener el cuadrado de un binomio.

Para ello, dividimos ambos miembros por el coeficiente de x^2, en este caso es 2:

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0.$$

Notemos que

$$\frac{5}{2}x = 2\,\frac{5}{4}x,$$

, así que si en el miembro izquierdo tuviéramos el término $(\frac{5}{4})^2$, entonces podríamos armar el cuadrado del binomio $(x + \frac{5}{4})$:

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = x^2 + 2\cdot\frac{5}{4}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

Pero como este término no aparece explícitamente, entonces lo sumamos y lo restamos en la expresión del miembro izquierdo:

$$x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = x^2 + 2\frac{5}{4}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{3}{2},$$

y de esta manera hemos completado la expresión de modo que aparezca el cuadrado de un binomio:

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2-\frac{3}{2}=0.$$

Esta ecuación se resuelve de manera mucho más simple. En efecto, queremos hallar los valores de x tales que

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$$

y estos valores son

$$x=\frac{7}{4}-\frac{5}{4}=\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad x=-\frac{7}{4}-\frac{5}{4}=-3.$$

Por lo tanto las raíces de la ecuación (3) son

$$x_1=\tfrac{1}{2} \text{ y } x_2=-3.$$

EL DISCRIMINANTE

Consideremos ahora la forma general de una ecuación de segundo grado:

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (2.6)$$

donde **a ,b** y **c** son números reales arbitrarios y a es distinto de cero. Nuestro objetivo es determinar cuáles son las soluciones de esta ecuación.

Si dividimos ambos miembros por a obtenemos la siguiente expresión de la ecuación:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0. \qquad (2.7)$$

Un artificio matemático muy utilizado, y que será de uso habitual en nuestra iniciación matemática universitaria, es la suma y resta de una misma expresión numérica o algebraica conveniente. Algo similar a lo que efectuamos en el *Ejemplo 3* al sumar y restar el término$\left(\frac{5}{4}\right)^2$

Así, si sumamos y restamos la expresión $\frac{b^2}{4.a^2}$en el miembro izquierdo de la ecuación, habremos completado el desarrollo del cuadrado de un binomio. Veamos esto.

$$\begin{aligned}
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= x^2+\frac{b}{a}x+\mathbf{\frac{b^2}{4a^2}}-\mathbf{\frac{b^2}{4a^2}}+\frac{c}{a} \\
&= x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a} && .9) \\
&= \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2} && 0)
\end{aligned}$$

Así, la ecuación (2.7) puede escribirse como

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0. \tag{2.11}$$

La expresión **b ² −4ac** recibe el nombre de discriminante, y se lo simboliza con la letra griega delta mayúscula Δ:

$$\Delta=b^2-4ac \tag{2.12}$$

Entonces, para hallar las soluciones o raíces de la ecuación de segundo grado (2.6) debemos resolver la ecuación

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \tag{2.13}$$

o equivalentemente

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}. \tag{2.14}$$

Para resolver la ecuación (2.14) tendremos en cuenta tres casos:

$$\boxed{\Delta>0,\ \Delta=0 \text{ y } \Delta<0.}$$

Si Δ > 0, entonces existen dos soluciones reales. En efecto, si x es una solución, entonces x satisface una de las siguientes ecuaciones:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{o} \qquad \left(x+\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Finalmente, despejando x obtenemos que en este caso las raíces son:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a.}$$

Estas soluciones suelen resumirse en la fórmula siguiente, conocida también como la fórmula de Bhaskara:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2.15}$$

El símbolo ± indica que hay dos soluciones, una con el signo + y la otra con el signo −.

Si Δ = 0, entonces la única solución es

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

En el caso en que Δ < 0, la ecuación (2.14) tiene soluciones en el campo de los números complejos. No es posible hallar raíces reales ya que el cuadrado de un número real no puede ser negativo. Recordemos que el número imaginario *i* es tal que $i^2 = -1$. Así, una solución x0 de la ecuación (2.14) para el caso Δ < 0 satisface una de las siguientes ecuaciones:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = i\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{o} \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right) = -i\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Por lo tanto las raíces de la ecuación son

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

CLASIFICACIÓN DE LAS RAÍCES

Resumimos entonces qué tipo de raíces se obtienen en una ecuación de segundo grado según sea el signo del discriminante.

Si $\boxed{b^2 - 4ac = \Delta > 0}$, entonces **hay dos raíces reales y distintas**, dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $\boxed{b^2 - 4ac = \Delta = 0}$, entonces hay **una única raíz real doble**, dada por

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Se dice que esta raíz es doble, o que la ecuación posee dos raíces iguales, pues en este caso la ecuación original (2.6) puede escribirse de la forma

$$a\,(x - x_0)^2 = 0.$$

Si $\boxed{b^2 - 4ac = \Delta < 0}$, entonces hay dos raíces complejas conjugadas y distintas, dadas por

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

EJERCICIOS

2.1_Escribir algebraicamente los siguientes enunciados.

a) El doble de un número.

b) El opuesto de un número.

c) La suma de un número y su inverso.

d) El producto de tres números.

e) El cuadrado de la suma de dos números

f) La diferencia entre el triplo de un número y su doble.

2.2_ Escribir un enunciado que se traduzca en la expresión algebraica dada:

a) $a - a^2$ b) $a-b^2$ c) $|x|$ d) $x^2 + 5$ e) $(x+5)^2$ f) $(x+y)^2$

g) $2.x + x$ h) $(m + 1) + m$ i) $3. f + (f+1)$ g) $\sqrt[5]{t^3}$ h) $\frac{p+1}{2}$ i) $\frac{b}{3}$

2.3_ Suponiendo que en todos los casos se trata de números enteros, escribir algebraicamente los siguientes enunciados:

a) La suma de dos números enteros consecutivos.

b) El producto de tres números enteros consecutivos.

c) Un número par.

d) La suma de un número par y uno impar.

e) La suma de un número par y el impar siguiente.

f) El doble de un número impar.

2.4_ Escribir una expresión algebraica que represente a los siguientes enunciados:

a) El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado de uno de ellos, más el cuadrado del otro más el doble producto de ambos.

b) El valor absoluto de un número es igual al valor absoluto de su opuesto.

c) La diferencia entre los cuadrados de dos números es igual al producto entre la diferencia y la suma de los mismos.

d) En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

2.5_ Escribir una ecuación que represente a los siguientes problemas. Identifique cuál o cuáles son las incógnitas en el problema. Finalmente, encontrar el conjunto solución.

a) Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo en términos de su cateto menor, sabiendo que un cateto mide el doble que el otro.

b) El cuadrado de un número es igual al triple del mismo número.

c) ¿Existen tres enteros consecutivos cuya suma sea 121?

2.6_ Despejar **y** en las siguientes ecuaciones:

a) $y = 3x + 2y + 1$ b) $x.y = 5$ c) $x^2 + 2xy = y - 5$

2.7_ Despejar la incógnita que se muestra encerrada entre { } en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\{n\}$ $I = \frac{nE}{R + nr}$

b) $\{S\}$ $T = \sqrt{\frac{R - S}{S}}$

c) $\{R\}$ $I = E\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$

d) $\{M\}$ $B = \frac{1}{2}(M + \sqrt{M^2 + T})$

2.8_ Para cada uno de los siguientes polinomios, indicar el grado y el coeficiente principal.

a) $-7x^3 + 8x^2 + 20x^5 + x$ b) $1 + x^2 - x^6 + 3$ c) $2^3 + 3^3x + 4^3x^2 + 5^3x^3$

2.9_ Dados los polinomios $P(x) = 3x^2 - 2x - 1$ y $Q(x) = x^3 - 3x + 3$, resolver las siguientes operaciones y dar el grado del polinomio resultante.

a) $P(x) + Q(x)$

b) $P(x) - Q(x)$

c) $P(x) \cdot Q(x)$

d) $Q(x) \cdot (x - 1)$

e) $P^2(x) - Q^2(x)$

f) $3 \cdot Q(x) - x \cdot P(x)$

2.10_ Cada una de las siguientes expresiones corresponde a una ecuación de segundo grado. Para cada una de ellas,

- Calcular el discriminante Δ,
- Determinar si tiene 2 raíces reales distintas, una única raíz doble o dos raíces complejas,
- Calcular las raíces x_1 y x_2, y escribir cada ecuación de la forma $a.(x - x_1)(x - x_2)$.

a) $x^2 - 5x - 5 = 0$

b) $x^2 + x - 1 = 0$

c) $4x^2 + 4 = 5x$

d) $32x^2 - 20x + 3 = 0$

e) $x^2 - 28x + 192 = 0$

f) $x^2 + 7x - 9 = 0$

g) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

h) $9x^2 - 8x + 1 = 0$

i) $2x^2 + 3x = 7x + 4$

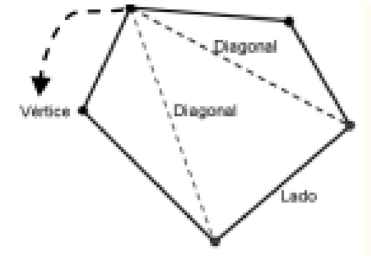
MÓDULO III: GEOMETRÍA

A continuación, repasaremos algunas nociones de geometría que les serán útiles para plantear y resolver problemas a lo largo de este seminario. En el mundo en el que vivimos podemos observar muchos objetos con formas geométricas. En la Naturaleza abundan más las líneas curvas, pero en los objetos construidos por los seres humanos predominan las rectas. Muchas de las figuras planas que pueden contemplar a su alrededor están limitadas por segmentos, por ejemplo, ventanas, puertas, baldosas, cuadros, etc. Estas figuras se llaman polígonos. Los polígonos reciben diferentes nombres según el número de lados que tengan

Nombre del polígono	Número de lados
Triángulo	3
Cuadrilátero	4
Pentágono	5
Hexágono	6
Heptágono	7
Octógono	8
Eneágono	9

Recordemos algunos conceptos claves…

- Los **lados** de un polígono son los segmentos que forman el borde del polígono.
- La suma de las longitudes de los lados se denomina **perímetro**.
- Dos lados consecutivos del polígono se unen en un punto llamado **vértice**.
- Los segmentos que unen dos vértices no consecutivos del polígono se llaman **diagonales**.
- Los polígonos que tienen todos sus lados iguales se llaman **polígonos regulares**.



CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

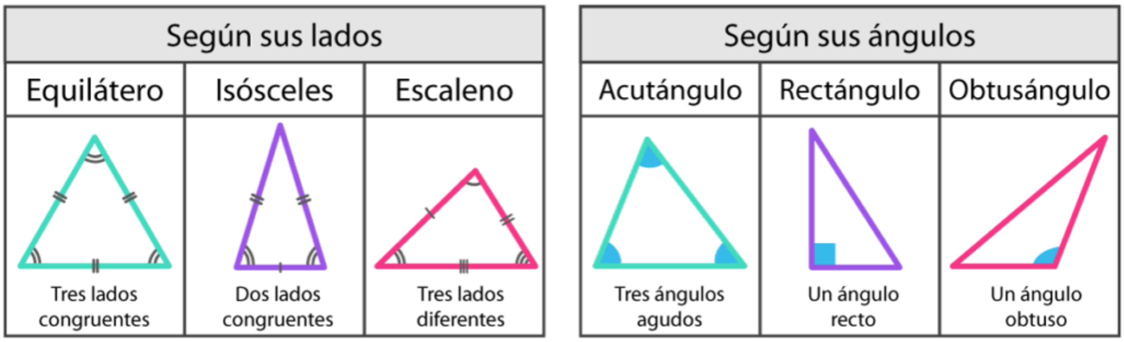
Por las **longitudes de sus lados** un triángulo puede ser:

- Equilátero, si tiene los tres lados de la misma longitud.
- Isósceles, cuando tiene dos lados iguales y otro desigual.

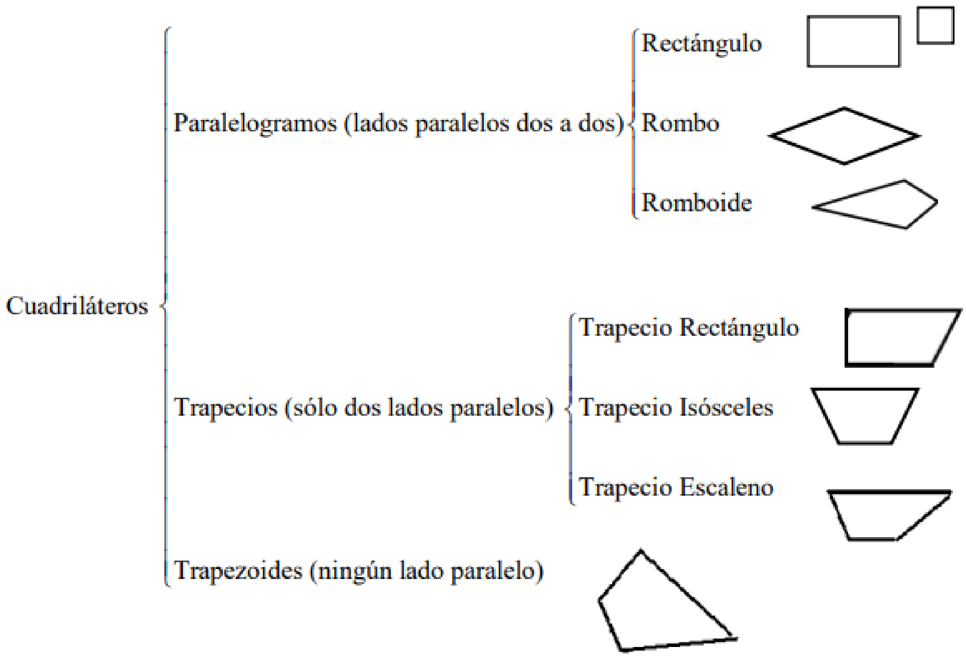
- Escaleno, si los tres lados tienen diferente longitud

Según la **amplitud de sus ángulos** un triángulo puede ser:

- Acutángulo, si los tres ángulos son agudos.
- Rectángulo, cuando tiene un ángulo recto.
- Obtusángulo, si tiene un ángulo obtuso.

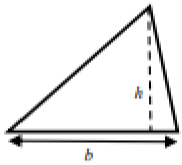
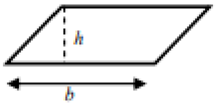
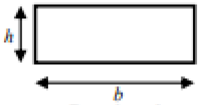
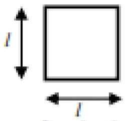
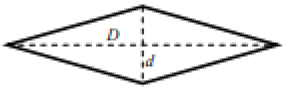
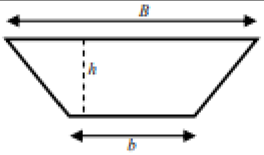


CLASIFICACIÓN DE CUADRILÁTEROS



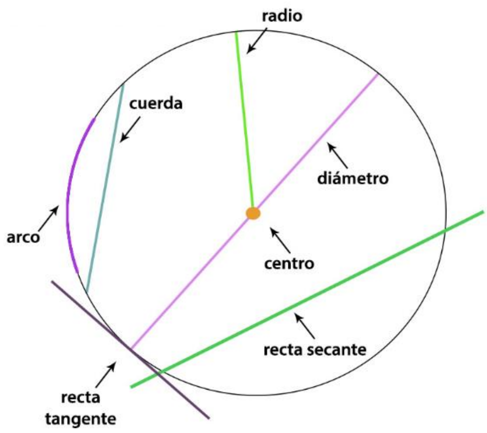
ÁREA DE FIGURAS PLANAS

A continuación recordaremos las áreas de las superficies poligonales más sencillas. Para ello será importante considerar que en el Sistema Métrico Decimal las unidades de medida de longitud son: Km, Hm, Dam, m, dm, cm y mm

Polígono	Área
 Triángulo	$\frac{b \cdot h}{2}$
 Paralelogramo	$b \cdot h$
 Rectángulo	$b \cdot h$
 Cuadrado	l^2
 Rombo	$\frac{D \cdot d}{2}$
 Trapecio	$\frac{(B+b) \cdot h}{2}$

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano que están a una distancia fija de un punto, llamado centro. La circunferencia es el borde y el círculo es el interior de la circunferencia. En la figura se muestran los principales elementos que existen en una circunferencia.



EJERCICIOS

3.1_ El perímetro de un triángulo Δ ABC es de 59 cm, el lado $\overline{AB}$ es 4 cm mayor que el lado $\overline{BC}$ y el lado AC es 5 cm menor que el duplo de $\overline{BC}$. Calculá la longitud de los lados del triángulo Δ ABC .

3.2_ Los triángulos rectángulos Δ ABC y Δ BCD son isósceles, y el lado BD tiene una longitud de 5 cm. Calculá:

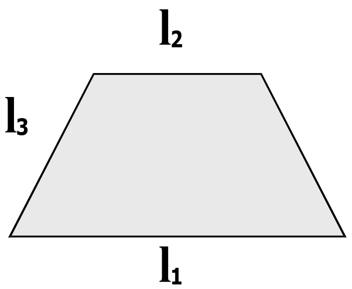
a) La longitud de $\overline{AB}$.

b) El perímetro de los triángulos Δ ABCy ΔBCD .

c) El área del triángulo Δ ABC

3.3_ En un terreno cuadrado hay una pileta rectangular de 20 m por 30 m, y se sabe que la superficie que queda alrededor de la pileta es mayor que 1200 2 m . ¿Se puede alambrar el terreno con 150 m de alambre?

3.4_ Dado el siguiente trapecio isósceles



a) Expresar el perímetro del mismo con una fórmula de no más de tres sumandos.

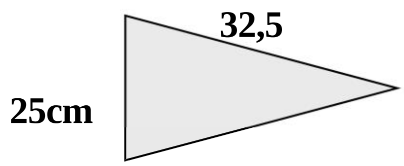
b) Calcular el perímetro sabiendo que l_1 tiene una longitud de 9cm y l_2 es la mitad de l_1, mientras que l_3 es el promedio de ambos lados.

3.5_ Una alfombra rectangular de 2,4 m de largo por 2 m de ancho cubre $\frac{2}{9}$ de un salón de 7,2 m de largo. ¿Cuál es el ancho del salón?

3.6_ En un terreno con forma de trapecio con 200 m de base mayor, 140 de base menor y 80 m de altura, se han plantado 2 pinos por cada 100 m^2. ¿Cuántos árboles se plantaron en total?

3.7_ Mientras la rueda delantera del triciclo da 3 vueltas, las traseras, de 18 cm de diámetro, dan 5. ¿Qué radio tiene la rueda delantera?

3.8_ Para hacerle el borde a unos banderines (como los de la figura) se les coserán cintas de colores: 50 banderines llevarán cinta de color verde, 25 con cinta roja y 30 con cinta blanca. Si cada rollo de cinta trae 10m ¿cuántos rollos de cada color se deben comprar?

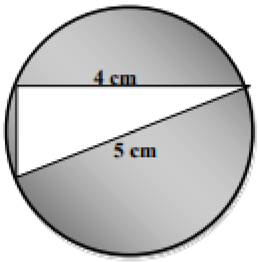


3.9_ El perímetro de un trapecio isósceles es de 108cm. Cada uno de los lados congruentes mide 23cm, la base mayor supera en 8cm a la longitud de la base menor. Calcula las longitudes de las bases del trapecio.

3. 10_ El perímetro de un trapecio rectángulo es de 54cm; la medida del lado oblicuo a las bases es de 12cm, la medida de la base menor es igual a la medida de la altura y la base mayor mide el doble de la base menor. Calcular el área del trapecio.

3. 11_ En un rombo una diagonal es el triple de la otra, y la suma de sus longitudes es igual a 30cm. Calcular el área del rombo.

3.12_ Calcula el área de la parte sombreada de las siguientes figuras:


4 cm
5 cm

MÓDULO IV: TRIGONOMETRÍA.

Etimológicamente, la palabra trigonometría significa medición de triángulos. En términos generales, la Trigonometría es un área de la matemática que surge del estudio de la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo y de las cuerdas y arcos de una circunferencia. Actualmente la trigonometría y las funciones trigonométricas han sobrepasado su fin original para convertirse en elementos matemáticos estudiados en sí mismos y con aplicaciones en los campos más diversos. En particular, se extiende a geometrías no euclidianas, como son la geometría esférica y la geometría hiperbólica, en las que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor o menor a 180◦ , respectivamente.

Las funciones trigonométricas son de gran importancia en Física, Astronomía, Náutica, Cartografía, Telecomunicaciones, la representación de fenómenos periódicos y muchas otras aplicaciones.

La historia de la Trigonometría y de las funciones trigonométrica se remonta a las matemáticas producidas por las culturas egipcias y babilónicas, quienes conocían ya los teoremas sobre las proporciones de los lados de los triángulos semejantes. Los egipcios fueron los primeros en usar la división en grados, minutos y segundos para la medida de ángulos. Los astrónomos babilonios llevaron registros detallados sobre la salida y puesta de las estrellas, el movimiento de los planetas y los eclipses solares y lunares, todo lo cual requiere la familiaridad con la distancia angular medida sobre la esfera celeste. Entre las numerosas aplicaciones se encuentran las técnicas de triangulación que son usadas en Astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en los sistemas globales de navegación por satélites.

El Occidente se familiarizó con la Trigonometría árabe a través de traducciones de libros de astronomía arábigos, que comenzaron a aparecer en el siglo XII. A principios del siglo XVII, se desarrolló el concepto de logaritmo y, gracias a esto, los cálculos trigonométricos recibieron un gran empuje. A mediados del siglo XVII, Newton y Leibniz desarrollaron el calculo diferencial e integral. Y en el siglo XVIII, el matemático suizo Euler demostró que las propiedades de la trigonometría eran producto de la aritmética de los números complejos y, además, definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos.

SISTEMA DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Para mediar ángulos se utilizan generalmente dos sistemas de medición:

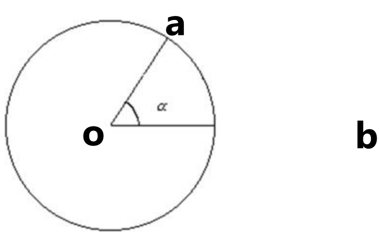
Sistema Sexagesimal:

La unidad de medida es el **grado sexagesimal** (1º), se obtiene al dividir un ángulo recto en 90 partes iguales.

$$1º = \frac{1\ R}{90} \Rightarrow 1R = 90º$$

Sistema Circular:

La unidad de medida es el **radián** y es el ángulo que abarca un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la misma. Un ángulo de giro es **de 2π radianes**.



$$r=\overline{ob}$$

$$\overline{ab}=\overline{ob}$$

$$\alpha = 1\text{radián} = \frac{ab}{ob}$$

Equivalencias entre ambos Sistemas.

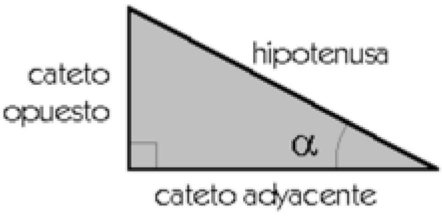
Sistema Sexagesimal	Sistema Circular
90º	π/2
180º	π
360º	2π

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Se denominan razones trigonométricas a las razones que relacionan las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con las amplitudes de los ángulos agudos del mismo. Estas razones son**: seno, coseno** y **tangente** y dependen únicamente de la amplitud del ángulo considerado.

Para definir estas razones, en un triángulo rectángulo, se tendrá en cuenta: la **hipotenusa**, se identifica como el lado opuesto al ángulo recto; los **catetos opuesto** y a**dyacente** dependerán del ángulo agudo con el que se trabaje.

Las razones trigonométricas se definen de la siguiente manera:



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Estas razones trigonométricas permiten resolver triángulos rectángulos: conocer las amplitudes de sus ángulos agudos y las longitudes de sus lados.

Para resolver triángulos rectángulos se tendrá en cuenta:

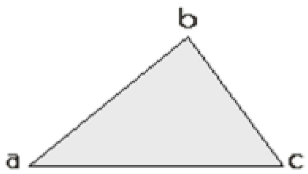
- que la suma de las amplitudes de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es de 90º
- el **Teorema de Pitágoras**: el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

TEOREMA DEL SENO Y DEL COSENO

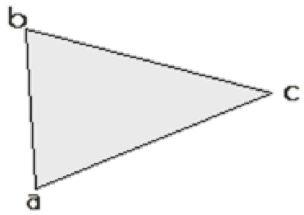
Estos teoremas relacionan las longitudes de los lados de cualquier triángulo con las amplitudes de sus ángulos interiores.

Teorema del Seno: en todo triángulo sus lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos



$$\frac{\overline{ab}}{\text{sen } c} = \frac{\overline{bc}}{\text{sen } a} = \frac{\overline{ac}}{\text{sen } b}$$

Teorema del Coseno: el cuadrado del lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que forman.



$$\overline{bc}^2=\overline{ab}^2+\overline{ac}^2 - 2 \cdot \overline{ab} \cdot \overline{ac} \cdot \cos a$$

$$\overline{ac}^2=ab^2+\overline{bc}^2 - 2 \cdot \overline{ab} \cdot \overline{bc} \cdot \cos b$$

$$\overline{ab}^2=\overline{ac}^2+\overline{bc}^2 - 2 \cdot \overline{ac} \cdot \overline{bc} \cdot \cos c$$

RELACIÓN ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN MISMO ÁNGULO

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} \qquad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{1}{\text{tg } \alpha} \qquad \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

Relación pitagórica

$$\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

EJERCICIOS

4.1_ La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 10 cm y uno de sus ángulos mide 30◦ . ¿Cuánto miden los otros lados?

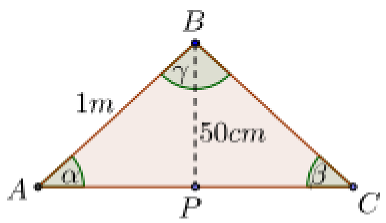
4.2_ Un pino gigante proyecta una sombra de 7,50m. de largo. Calculá la altura del árbol si el ángulo de elevación del Sol es de 25 °.

4.3_ Calcula la altura de un triángulo rectángulo, si se sabe que la longitud de la base es 4,5mm y la longitud de la hipotenusa es 11,5mm.

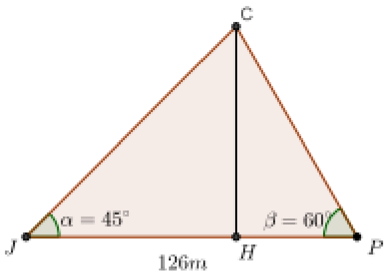
4.4_ Calcula el perímetro de un cuadrado, si la longitud de la diagonal es 4,15cm y determina con los lados un ángulo de 45º.

4.5_ Se utiliza un tensor para sostener una antena de telefonía de 24,5m. Calcula la lngitud del tensor, si este determina con la antena un ángulo de 63º.

4.6_ En el triángulo isósceles de la figura, los lados iguales miden 1 m, y la altura con respecto al lado restante mide 50 cm. ¿Cuál es la medida de los ángulos?

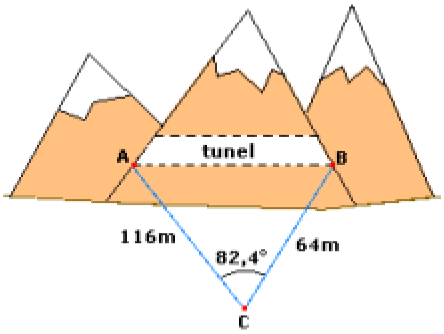


4.7_ Juan y Pedro ven desde las puertas de sus casas la parte superior de una torre, bajo ángulos de 45◦ y 60◦ con respecto al suelo. La distancia entre sus casas es de 126 m y la torre está situada entre sus casas y sobre la línea que las une. Hallar $|\overline{CH}|$, la altura de la torre.



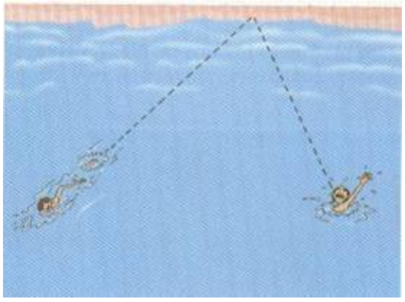
4.8_ Un satélite en órbita terrestre pasa directamente por encima de dos estaciones de observación A y B, separadas por 630 km. de distancia. Desde la estación A se lo observa con un ángulo de elevación de 60° y desde la B con un ángulo de 75°. ¿A qué distancia está el satélite de la segunda estación?

4.9_ Longitud de un túnel: Se necesita construir un túnel a través de una montaña. Para estimar la longitud del túnel, un topógrafo toma las medidas que se indican en la figura. Utilizá los datos del topógrafo para calcular la longitud del túnel.



4.10_ En una competencia de natación dos amigos parten lanzándose al agua desde una balsa al mismo tiempo; el primero nada a una velocidad promedio de 6 km/h y el segundo a 5 km/h. Comienzan a alejarse entre sí con un ángulo de 35º; después de media hora de competencia, el segundo sufre un calambre.

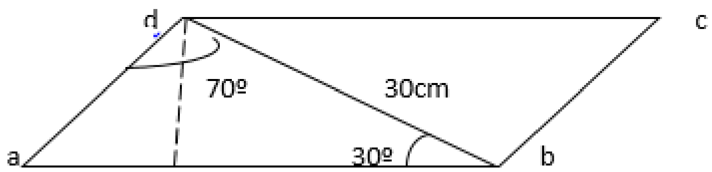
¿Qué distancia recorrerá el primero para ir en su auxilio y qué ángulo tendrá la nueva dirección de este?



4.11_ Calcula los ángulos interiores de un triángulo sabiendo que las longitudes de sus lados son A=85m, B=58m y C=80m

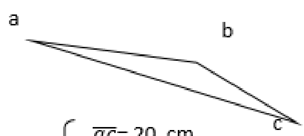
4.12_ Hallar el área de un triángulo, cuyos dos de sus ángulos miden 30 º y 60º y el lado opuesto al primer ángulo mide 2m.

4.13_ Calculen el perímetro y el área del siguiente paralelogramo.



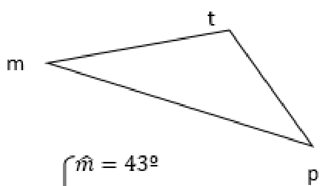
4.14_ Calcular

a)



$\left\{ \begin{array}{l} \overline{ac} = 20 \text{ cm} \\ \hat{a} = 60º \\ \hat{b} = 70º \end{array} \right.$

b)



$\left\{ \begin{array}{l} \hat{m} = 43º \\ \overline{mp} = 27cm \\ \overline{mt} = 28cm \end{array} \right.$

PALABRAS FINALES

Toda **Institución Educativa Superior** debe garantizar el derecho a la educación pudiendo acceder, permanecer y egresar del Nivel, lo que implica generar **tiempo y espacio para el estudio** a todos/as los/as estudiantes sin importar sus condiciones -sociales, económicas, ideológicas, de aptitud, familiares, de edad, etc.- ofreciendo **igualdad de oportunidades y de aprendizaje**, y a la vez una educación de calidad desde una **perspectiva de derechos y de responsabilidades**.

Si el carácter público de la educación tiene que ver con *desprivatizar los bienes culturales*, es decir, distribuir dichos bienes acumulados para que sean de todos/as, [el Instituto] debiera *educar para la libertad*, *para que todos/as puedan ser lo que quieran ser*[2]. En este sentido, los/as ingresantes al Nivel Superior tienen la libertad de elegir lo que quieren ser: técnicos, médicos, educadores, arquitectos, músicos, etc., y también elegir el cómo transitar su trayecto formativo. Pues sus características –sujetos portadores de saberes, valores, cultura, experiencias singulares, sumadas a aquellas condiciones como la de ser hijos, padres, solteros, casados, jóvenes, adultos, "mayores", trabajadores y desocupados, etc.- **lo posicionan frente a su trayectoria formativa** (*una trayectoria es un camino que se recorre, se construye, que implica a sujetos en situación de acompañamiento*[3]) **como el constructor de su propio itinerario real y concreto**, como el constructor de un modo singular de transcurrir, de experimentar, de vivir conforme pasa el tiempo. Así mismo, dentro de su trayectoria formativa y pensando en que **cada estudiante se forma a sí mismo**, pues *los dispositivos, los contenidos de aprendizaje, el currículum no son la formación en sí sino medios para la formación*[4], adhiero a las ideas de Masschelein y Simons (2014) de que la escuela -la institución- es la que debe proporcionar una particular composición del **tiempo**, del **espacio** y

[2] Fontana, A. y Equipo de producción de materiales educativos en línea. (2021). Clase 1: El carácter público de la educación, la política educativa provincial y la gestión directiva.

[3] Nicastro S., Greco,M.B., (2012), p.24

[4] Ferry G., Pedagogía de la Formación, (p.55).

la **materia de estudio** que configuran lo escolar -lo académico-, y que son condiciones fundamentales para que esa formación tenga lugar. Una formación que implique una transformación sustantiva y significativa para *"renovar el mundo"*[5].

Y en el caso de la Formación Docente Inicial, los/as estudiantes deben formarse para que puedan, ya siendo educadores/as, ofrecer en la escuela - transformadora de conocimientos en bienes comunes- un *"tiempo libre"* donde los/as estudiantes adolescentes realicen actividades que conduzcan a *habilidades o competencias adicionales*, **cuya principal actividad sea la de estudiar**. Estudiar entendida como una acción que permite *expandir*, *abrir al mundo*[6], que implica perseverancia, actitud, esfuerzo, hábito. Estudiar para que un/a niño/a y/o un adolescente en condiciones paupérrimas *devenga premio Nobel* de Química.

Prof. V. Mabel Ramos

Directora del Instituto Superior Zarela Moyano de Toledo

BIBLIOGRAFÍA

- Sears F., Zemansky, M. (1977). *FISICA. Colección ciencia y técnica.* Ed. Aguilar.
- PRO CIENCIA Conicet. (1996). Programa de perfeccionamiento docente. *FISICA. Su enseñanza.*
- AAVV. (1999). *MATEMÁTICA II.* Ed. Santillana, Polimodal.
- Ingreso a FAMAF: materiales de estudio / Patricia Kisbye . [et al.]; contribuciones de Fredy Restrepo; coordinación general de Cristina Beatriz Esteley.-1a ed. - Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba.

---

[5] Fontana, A. y Equipo de producción de materiales educativos en línea. (2021). Clase 1: El carácter público de la educación, la política educativa provincial y la gestión directiva.

[6] Ibídem.